

**Titre:** Modélisation de réseaux périodiques multicouches par la méthode  
Title: des lignes

**Auteur:** Éric Choinière  
Author:

**Date:** 1999

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Choinière, É. (1999). Modélisation de réseaux périodiques multicouches par la  
Citation: méthode des lignes [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal].  
PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8748/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8748/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:**  
Advisors:

**Programme:** Unspecified  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION DE RÉSEAUX PÉRIODIQUES MULTICOUCHES PAR LA  
MÉTHODE DES LIGNES

ÉRIC CHOINIÈRE

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET DE GÉNIE INFORMATIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)

AOÛT 1999



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*

*Our file* *Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-48845-4

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

MODÉLISATION DE RÉSEAUX PÉRIODIQUES MULTICOUCHES PAR LA  
MÉTHODE DES LIGNES

présenté par: CHOINIÈRE Éric

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. BOSISIO Renato G., M.Sc.A., président

M. LAURIN Jean-Jacques, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. BÉRINI Pierre, Ph.D., membre



À mon Isabelle

## REMERCIEMENTS

Le candidat tient à remercier sincèrement son directeur de recherche, le professeur Jean-Jacques Laurin, pour son soutien et sa collaboration durant la réalisation de ce projet de recherche.

Pour les fructueuses discussions ayant servi à l'avancement du projet, des remerciements particuliers s'adressent au professeur Jean-Jacques Laurin ainsi qu'à Louis-Antoine Blais-Morin, Jean-François Blain, Jean Dallaire, Pierre-Richard Renaud, Jean-Daniel Richerd, Zacharia Ouardirhi et au professeur Ke Wu.

Merci aux professeurs Pierre Bérini, Renato G. Bosisio et Jean-Jacques Laurin pour avoir accepté de faire partie du jury d'examen.

Finalement, l'auteur remercie le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada pour la bourse de recherche accordée ainsi que le Centre de recherches sur les communications et Industrie Canada pour l'attribution de la bourse d'études supérieures Fessenden.

## RÉSUMÉ

L'objectif du projet de maîtrise dont fait l'objet ce mémoire est l'investigation de l'utilisation de la *méthode des lignes* pour la modélisation numérique de structures périodiques stratifiées composées de couches diélectriques intercalées de motifs métalliques. Les applications visées sont les grands réseaux d'antennes imprimées et les surfaces à sélection de fréquence.

Lors de la conception des *grands réseaux d'antennes imprimées* à faisceau orientable destinées à être installées à bord des satellites à basse orbite pour les applications de télécommunications mobiles, le couplage mutuel entre les éléments imprimés à travers les ondes de surface se propageant dans le substrat doit être pris en compte. En effet, ce couplage affecte considérablement l'impédance d'entrée des éléments et peut conduire à une réflexion totale du signal pour certains angles de balayage du faisceau principal. Une approche rigoureuse est donc nécessaire pour l'analyse de ces structures. Étant donné la grande taille des réseaux considérés (typiquement  $100 \times 100$  éléments), l'analyse de réseaux périodiques permet d'obtenir l'impédance d'entrée de la plupart des éléments d'un grand réseau et peut ainsi servir d'outil de conception.

L'utilisation de *surfaces à sélection de fréquences* (SSF) est de plus en plus envisagée pour la conception de radômes, de lentilles et de réflecteurs dans les applications d'antennes. Agissant comme filtres de fréquences, elles sont composées de motifs métalliques imprimés sur un ou plusieurs substrats diélectriques superposés. Puisque la taille des motifs est de l'ordre de la longueur d'onde, l'analyse des SSF doit être réalisée de façon rigoureuse. Les SSF considérées étant généralement assez grandes, l'analyse de structures périodiques est appropriée pour les fins d'une conception.

La *méthode des lignes* est une méthode semi-analytique consistant à procéder à une discrétisation partielle des opérateurs différentiels de l'équation de Helmholtz dans l'espace. Deux des trois dimensions dans l'opérateur sont discrétisées, autorisant

la résolution analytique, une fois découplées, des équations différentielles ordinaires. L'analyse des réseaux périodiques multicouches avec la méthode des moments est bien documentée ; l'utilisation de la méthode des lignes à discrétisation uniforme, particulièrement adaptée aux structures stratifiées, a pour but le développement d'un modèle plus simple et plus général. Une formulation basée sur la méthode des lignes est développée pour l'analyse du problème générique d'un réseau périodique multicouche doté de motifs métalliques quelconques à ses interfaces et de conditions absorbantes optionnelles. Elle résulte en un système d'équations homogène dont les inconnues sont, pour chacune des interfaces, soit les échantillons du champ électrique tangentiel, soit les échantillons de la densité surfacique de courant électrique. Un algorithme de réarrangement du système d'équations autorise le choix du type d'inconnu le plus approprié pour chacune des interfaces en vue de réduire au minimum le nombre total d'inconnues. Un protocole d'excitation du système homogène par une source distribuée est élaboré comme interface à des modèles de sources physiques.

Le nombre d'inconnues générées par la discrétisation selon deux variables avec la méthode des lignes est en général très élevé et constitue le principal frein à son utilisation à cause de l'espace mémoire et du temps de calcul requis pour la résolution du système d'équations linéaires avec un algorithme comme la décomposition LU. Une nouvelle approche est développée dans le cadre de ce travail pour tirer profit des propriétés de la méthode des lignes associées aux structures périodiques. Cette approche combine l'utilisation de la transformée rapide de Fourier et d'un algorithme de résolution itératif de systèmes d'équations linéaires. Elle permet l'analyse de problèmes à forte discrétisation en accélérant considérablement la vitesse de résolution et en réduisant dramatiquement l'espace mémoire nécessaire.

La validation initiale du modèle est réalisée par la modélisation de surfaces à sélection de fréquences. Un modèle de source est développé en accord avec l'interface mentionnée plus haut. L'ensemble permet de simuler la réaction, sous forme de coefficients de réflexion  $|R|^2$  et de transmission  $|T|^2$  de puissance, d'une SSF à une onde

plane à incidence oblique. La simulation de quatre configurations d'un réseau linéaire de bandes métalliques déposées sur un substrat diélectrique produit une convergence très rapide et des résultats compatibles aux données publiées. De plus, les simulations de trois configurations d'un réseau de plaques métalliques déposées sur un substrat diélectrique sont effectuées pour une onde à incidence normale et il en résulte une convergence légèrement moins bonne à cause des erreurs de discrétisation ; ceci est néanmoins compensé par l'efficacité de l'algorithme de calcul qui permet de résoudre un problème à forte discrétisation en peu de temps. Les résultats obtenus ont été validés avec succès à partir de publications.

L'application du modèle aux réseaux périodiques d'antennes plaques est réalisée au moyen de deux modèles de sources. Le premier est une source idéale de champ électrique distribué dans la fente sous chacune des plaques. Le calcul du coefficient de réflexion de l'onde de puissance émise en fonction de la direction du faisceau dans trois plans de balayage et sa comparaison avec les données publiées par d'autres auteurs permet de confirmer la validité du modèle et met en évidence les phénomènes escomptés tels le couplage aux ondes de surface et l'excitation de lobes discordants.

Le second modèle de source correspond à une source physiquement réalisable composée d'une ligne microruban couplée au résonateur plaque à travers une fente pratiquée dans un plan de masse. Une technique utilisée antérieurement de concert avec la méthode des moments et employant le principe de réciprocité pour modéliser le couplage d'une ligne microruban à une fente est adaptée ici à la méthode des lignes. Une première validation est obtenue en simulant l'opération d'un *simulateur à guide d'onde*, un montage expérimental possédant les mêmes propriétés d'impédance d'entrée qu'un réseau périodique d'antennes plaques couplées par fentes dont la direction de balayage du faisceau serait liée à la fréquence d'opération. Les résultats obtenus pour l'impédance à l'entrée de la ligne microruban en fonction de la fréquence sont comparés à des mesures expérimentales publiées. Les formes des courbes comparées sont compatibles mais des erreurs de discrétisation causent une

translation en fréquence des résultats. Dans une seconde validation d'une structure similaire comportant deux résonateurs superposés plutôt qu'un seul, les résultats obtenus sont comparables à des résultats publiés de simulation basées sur la méthode des moments; les divergences entre les courbes comparées sont probablement dûes à la non convergence des résultats simulés et des résultats publiés. Finalement, l'adaptation d'antenne obtenue par simulation pour le balayage du faisceau d'un réseau périodique est comparée à des résultats publiés. Encore une fois, les erreurs de discrétisation causent une translation en fréquence qui résulte en une désadaptation de l'impédance d'entrée; les résultats obtenus lorsque l'adaptation est corrigée pour l'angle d'incidence normale sont en accord avec les publications consultées.

Les principales contributions apportées par ce travail sont la formulation d'un modèle généralisé de structure multicouche périodique basé sur la méthode des lignes, l'adaptation à la méthode des lignes de la technique de réciprocité servant à modéliser le couplage entre une ligne microruban et une fente ainsi que la réduction considérable des exigences de mémoire et de temps de calcul du processus de résolution de problèmes périodiques basés sur la méthode des lignes à discrétisation uniforme. À titre de comparaison, la résolution par l'algorithme de décomposition LU d'un problème de réseau périodique d'antennes plaques impliquant quelque 17 000 inconnues demanderait environ 1 h 20 min de temps de calcul à un ordinateur Pentium I cadencé à 200 Mhz qui disposerait de 4,3 *giga*-octets de mémoire vive. La technique de résolution employée ici réduit le temps de calcul à 12 minutes et la taille mémoire requise à environ 25 *méga*-octets.

L'outil de calcul développé permet de considérer l'utilisation d'une forte discrétisation avec la méthode des lignes pour l'analyse de structures périodiques rayonnantes multicouches comme les réseaux d'antennes imprimées et les surfaces à sélection de fréquences. Il munit l'utilisateur d'une puissance de calcul accrue pour l'analyse de ce type de problèmes. Une étude plus poussée des problèmes reliés aux erreurs de discrétisation pourrait permettre d'accélérer la convergence des résultats.

## ABSTRACT

The objective of the present Master's project, which is the object of this thesis, is to investigate the use of the *Method of Lines* for the numerical modeling of stratified periodic structures composed of dielectric layers interspersed with metallic patches and slots. The targeted applications are large printed array antennas and frequency selective surfaces.

In the design of *large printed array antennas* with beam scanning capabilities, which are to be mounted on board of low-orbit satellites for mobile telecommunications applications, mutual coupling among printed elements through surface waves traveling in the substrates must be taken into account. In fact, this coupling has an important effect on the input impedance of the elements and can even lead to a total reflection of the incoming signal for certain scanning angles of the main beam. A full-wave method is thus necessary for the analysis of such structures. Since the considered array antennas are quite large (typically,  $100 \times 100$  elements), the analysis of periodic arrays is a valid approximation for the purpose of calculating the input impedance of most elements of a large array and is thus a useful design tool.

The use of *frequency selective surfaces* (FSS) is increasingly considered for the design of radomes, lens and reflectors in antenna applications. Acting as frequency filters, FSS are composed of metallic patches and slots printed on one or more stacked dielectric layers. Since the size of these patterns is of the order of the wavelength, the analysis of FSS must be done through a full-wave method. The considered FSS are generally large enough for the analysis of periodic structures to be appropriate as a design tool.

The *Method of Lines* is a semi-analytical method which consists in the partial discretization of the differential operators in the Helmholtz equation. Two out of three dimensions of the operator are discretized, which allows the analytical resolution of the remaining ordinary differential equations, which have been decoupled beforehand.

The analysis of periodic multilayered array antennas using the Method of Moments is documented in the literature; the reason to use the Method of Lines with uniform discretization, which is particularly well-suited for stratified structures, is to develop a simpler and more general model. A formulation based on the Method of Lines is developed for the analysis of the generic problem of a multilayered periodic array featuring arbitrarily shaped metallic patterns at its interfaces and optional absorbing boundary conditions. The outcome is a homogeneous linear system of equations for which the unknowns, on each interface, are either samples of the tangential electric field or samples of the electric surface current density. An algorithm is developed for the rearrangement of the system of equations, allowing for the choice of the most appropriate unknown on each interface in order to minimize the total number of unknowns. A protocol for the excitation of the homogeneous system of equations with a distributed source is developed and will serve as an interface to physical source models.

The very large number of unknowns generated by the Method of Lines when discretizing along two variables is the main factor discouraging its use, considering the memory requirements and time consumption of the LU decomposition algorithm. A new approach is developed here in order to take advantage of the special properties of the Method of Lines associated with periodic structures. This approach combines the use of the Fast Fourier Transform and an iterative resolution method for linear systems. It enables the analysis of highly discretized problems by considerably speeding up the resolution process and by drastically reducing the memory requirements.

Initial validation of the model was realized with the modeling of frequency selective surfaces. A source model was developed in accordance with the above mentioned physical source interface. The overall model, comprising both the structure model and the source model, allows simulation of the reaction, in the form of power reflection ( $|R|^2$ ) and transmission ( $|T|^2$ ) coefficients, of a frequency selective surface



illuminated by an incident plane wave. The simulation of four different configurations of a linear array of metallic strips lying on a dielectric substrate produces a very fast convergence and its results are similar to published data. Furthermore, the simulations of three configurations of a planar array of metallic patches lying on a dielectric substrate and submitted to an incoming plane wave at normal incidence are performed. The rate of convergence of the results is slightly reduced because of discretization errors, but is compensated by the efficiency of the resolution algorithm which allows fast resolution of highly discretized problems. The results are successfully validated with other results found in the literature.

The application of the model to periodic patch array antennas is realized using two different source models. The first model is an ideal E-field source applied across a slot under each patch. The calculation of the reflection coefficient of the emitted power wave as a function of the beam scan angle in three scan planes, and its comparison with the available published data allow confirmation of the model validity and shows the expected phenomena such as coupling to surface waves and grating lobes.

The second source model corresponds to a real physical source, that is a microstrip line coupled to the patch resonator through a slot in the ground plane. A technique which has previously been used together with the Method of Moments and which uses the reciprocity principle to model the coupling from a microstrip line to a slot is adapted here to the Method of Lines. A first validation is obtained by simulating the operation of a *waveguide simulator*, an experimental setup giving the same input impedance as that of a periodic patch array of slot-coupled antennas for which the scan angle would be linked to frequency. The results for the impedance at the input of the feeding microstrip line as a function of frequency are compared to experimental measurements available in the literature. The shapes of the compared curves compare well, but discretization errors cause a frequency shift of the results. In a second validation procedure, a similar structure comprising two stacked patch resonators

instead of one yields results which are comparable to published results based on simulations using the Method of Moments; the differences between the compared curves are probably due to the non convergence of both the simulation and published results. Finally, the simulated input reflection coefficient of one element of a patch array as a function of the beam scan direction is compared to published results. Again, the discretization errors cause a frequency shift which results in a mismatch of the input impedance. However, the results obtained after the input impedance has been matched at broadside angle compare very well with the literature.

The main contributions of this work are the formulation of a generalized model based on the Method of Lines for periodic multilayered structures, the adaptation for use with the Method of Lines of the reciprocity technique which models the coupling between a microstrip line and a slot, as well as the significant reduction of memory requirements and time consumption of the resolution process for periodic problems based on the Method of Lines using uniform discretization. As a comparison, the resolution of a periodic patch array antenna problem involving about 17,000 unknowns would require, using the LU algorithm, approximately 1 h 20 min of computing time with a 200 Mhz Pentium I computer which would dispose of 4.3 *giga*-bytes of random-access memory. The resolution technique presented here reduces these requirements to 12 minutes of computing time using approximately 25 *mega*-bytes of memory.

The numerical tool developed here allows the use of high discretization with the Method of Lines for the analysis of radiating multilayered periodic structures like array antennas and frequency selective surfaces. It provides the user with increased computation power for the analysis of this category of problems. Further studies of problems related to discretization errors could allow the acceleration of convergence.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>DÉDICACE</b> . . . . .	<b>iv</b>
<b>REMERCIEMENTS</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>RÉSUMÉ</b> . . . . .	<b>vi</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>x</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES</b> . . . . .	<b>xiv</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX</b> . . . . .	<b>xix</b>
<b>LISTE DES FIGURES</b> . . . . .	<b>xx</b>
<b>LISTE DES SIGLES ET ABBRÉVIATIONS</b> . . . . .	<b>xxviii</b>
<b>LISTE DES ANNEXES</b> . . . . .	<b>xxix</b>
<b>INTRODUCTION</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 1 : DÉFINITION DU PROBLÈME</b> . . . . .	<b>7</b>
1.1 Structure plane multicouche générale . . . . .	7
1.2 Excitation d'une surface à sélection de fréquences . . . . .	9
1.3 Excitation d'un réseau périodique d'antennes plaques couplées par fentes . . . . .	10
<b>CHAPITRE 2 : FORMULATION GÉNÉRALE DU PROBLÈME DE</b> <b>STRUCTURE PLANAIRE MULTICOUCHE</b> . . . . .	<b>12</b>
2.1 Principes de base de la méthode des lignes . . . . .	12
2.2 Discrétisation de l'équation de Helmholtz . . . . .	13
2.3 Diagonalisation de l'équation de Helmholtz . . . . .	20

2.4	Calcul des champs discrétisés $\mathbf{E}_x$ et $\mathbf{H}_x$ à partir de $\mathbf{E}_z$ et $\mathbf{H}_z$ . . . . .	26
2.5	Paramètres hybrides d'une couche diélectrique . . . . .	31
2.5.1	Expression de la dérivée du champ en fonction des valeurs des champs tangentiels aux interfaces . . . . .	31
2.5.2	Expression des champs électromagnétiques tangentiels à une interface en fonction des champs électromagnétiques tangen- tiels à l'autre interface . . . . .	33
2.6	Paramètres Y d'une couche absorbante . . . . .	35
2.6.1	Condition absorbante supérieure . . . . .	35
2.6.2	Condition absorbante inférieure . . . . .	37
2.7	Construction du système d'équations transformé . . . . .	38
2.7.1	Lignes intermédiaires du système d'équations . . . . .	38
2.7.2	première ligne du système d'équations (ligne numéro 0) . . . .	41
2.7.3	Dernière ligne du système d'équations (ligne numéro $N_c$ ) . . .	43
2.7.4	Système d'équations global homogène dans le domaine trans- formé . . . . .	44
2.8	Réduction du système d'équations dans le domaine spatial . . . . .	45
2.9	Alternatives dans le choix des inconnues du système d'équations . . .	47
2.10	Application d'une source de champ ou de courant électrique . . . . .	50
2.10.1	Application d'une source distribuée «X» . . . . .	52
2.10.2	Application d'une source distribuée «Y» . . . . .	52
2.10.3	Formulation générale de l'application d'une source «X» ou «Y»	53
2.11	Résolution du système d'équations par méthode itérative . . . . .	54
2.11.1	Temps de calcul et espace mémoire nécessaires pour une dé- composition LU . . . . .	54
2.11.2	Stockage de $\tilde{\mathbf{M}}_{Hred'}$ sous forme compacte et calcul rapide du produit $\tilde{\mathbf{M}}_{Hred'} \tilde{\mathbf{A}}_{red'}$ . . . . .	56
2.11.3	Résolution du système d'équations par méthode itérative . . .	60

2.11.3.1	Critère de convergence de la solution itérative . . . .	62
2.12	Positionnement des lignes aux extrémités métalliques . . . . .	65
2.12.1	Dimensions effectives des formes métalliques . . . . .	67
2.12.1.1	Dimensions et position effectives d'un ruban ou d'une plaque rectangulaire métallique . . . . .	67
2.12.1.2	Dimensions et position effective d'une fente rectan- gulaire dans un plan de masse . . . . .	69
2.13	Conclusion du chapitre . . . . .	70

### **CHAPITRE 3 : ANALYSE DE SURFACES À SÉLECTION DE FRÉ- QUENCES . . . . . 71**

3.1	Définition des plans d'incidence . . . . .	71
3.2	Formulation de la source à polarisation $TE$ . . . . .	72
3.2.1	Forme analytique . . . . .	72
3.2.2	Forme discrétisée et normalisée . . . . .	76
3.2.2.1	Calcul du coefficient de réflexion $R$ . . . . .	76
3.2.2.2	Calcul du coefficient de transmission $T$ . . . . .	77
3.3	Formulation de la source à polarisation $TM$ . . . . .	79
3.3.1	Forme analytique . . . . .	79
3.3.2	Forme discrétisée et normalisée . . . . .	80
3.3.2.1	Calcul du coefficient de réflexion $R$ . . . . .	81
3.3.2.2	Calcul du coefficient de transmission $T$ . . . . .	81
3.4	Résultats, validation et convergence . . . . .	81
3.4.1	Réseau linéaire de bandes métalliques sur un substrat diélectrique	82
3.4.1.1	Discrétisation des bandes métalliques . . . . .	82
3.4.1.2	Résultats obtenus . . . . .	82
3.4.2	Réseau planaire de plaques métalliques sur un substrat diélec- trique . . . . .	88

3.4.2.1	Discrétisation des plaques métalliques . . . . .	88
3.4.2.2	Résultats obtenus . . . . .	89
3.5	Conclusion du chapitre . . . . .	92

## CHAPITRE 4 : ANALYSE DE RÉSEAUX PÉRIODIQUES

	<b>D'ANTENNES PLAQUES . . . . .</b>	<b>99</b>
4.1	Source de tension idéale distribuée . . . . .	100
4.1.1	Formulation de la source . . . . .	100
4.1.2	Résultats et validation . . . . .	103
4.1.2.1	Première configuration - substrat mince . . . . .	104
4.1.2.2	Deuxième configuration - substrat épais . . . . .	110
4.1.2.3	Troisième configuration - substrat épais et lobe dis- cordant . . . . .	114
4.2	Alimentation par fentes couplées . . . . .	118
4.2.1	Formulation de la source par la méthode de réciprocité . . . . .	119
4.2.1.1	Application du principe de réciprocité . . . . .	120
4.2.1.2	Caractérisation du mode fondamental d'une ligne mi- croruban . . . . .	122
4.2.1.2.1	Conditions aux frontières et discrétisation . . . . .	122
4.2.1.2.2	Calcul de la constante de propagation . . . . .	123
4.2.1.2.3	Calcul de l'impédance caractéristique du mode fondamental . . . . .	123
4.2.1.3	Continuité du champ magnétique tangentiel dans la fente . . . . .	125
4.2.1.4	Calcul du coefficient de réflexion devant la fente . . . . .	126
4.2.1.5	Calcul de l'impédance série sur la ligne microruban et ajout d'un tronçon de ligne . . . . .	127
4.2.2	Résultats de simulation et validation . . . . .	128

4.2.2.1	Simulateur à guide d'onde à un résonateur - validation expérimentale . . . . .	129
4.2.2.2	Simulateur à guide d'onde à deux résonateurs - validation avec une publication . . . . .	135
4.2.2.3	Balayage du faisceau : validation avec résultats de simulation publiés . . . . .	138
4.3	Exemples de distributions de courants et de champs obtenues . . . . .	146
4.4	Conclusion du chapitre . . . . .	149
<b>CONCLUSION . . . . .</b>		<b>151</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE . . . . .</b>		<b>160</b>

**LISTE DES TABLEAUX**

2.1	Algorithme de calcul de la matrice $\tilde{\mathbf{M}}_H$ à partir de la matrice $\tilde{\mathbf{M}}_E$ . .	49
-----	---	----



## LISTE DES FIGURES

1.1	Topologie générale de la cellule multicouche étudiée et notation employée	8
1.2	Topologie particulière d'une Surface à sélection de fréquences (SSF) - coupe transversale . . . . .	9
1.3	Topologie particulière d'un réseau périodique d'antennes plaques cou- plées par fentes . . . . .	10
1.4	Exemple de combinaison de deux réseaux périodiques à des fréquences différentes : le plus petit commun multiple des périodes inclus deux éléments du réseau inférieur (basse fréquence) et trois éléments du réseau supérieur (haute fréquence) . . . . .	11
2.1	Discrétisation d'une cellule d'un réseau périodique avec nomenclature employée pour les lignes . . . . .	15
2.2	Interfaces de part et d'autre d'une couche diélectrique . . . . .	32
2.3	Condition absorbante . . . . .	36
2.4	Couche diélectrique intermédiaire . . . . .	39
2.5	Couche diélectrique inférieure . . . . .	42
2.6	Couche diélectrique supérieure . . . . .	43
3.1	Système de coordonnées sphériques utilisé pour la direction des onde incidentes, réfléchie et transmise . . . . .	72
3.2	Modes d'excitation $TE$ et $TM$ dans le plan d'incidence de l'onde . .	73
3.3	Courbes de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane (angle d'incidence de 30 degrés par rapport à la normale) sur un ré- seau linéaire de rubans métalliques espacés de $0,3\lambda_0$ et sans substrat diélectrique. Résultats avec la méthode des lignes pour 5 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [24]. . . . .	84

- 3.4 Courbes de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane (angle d'incidence de 30 degrés par rapport à la normale) sur un réseau linéaire de rubans métalliques espacés de  $0,3\lambda_0$  et déposés sur un substrat diélectrique de permittivité  $\epsilon_r = 2$  et d'épaisseur  $d = 0,1\lambda_0$ . Résultats avec la méthode des lignes pour 5 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [24]. . . . . 85
- 3.5 Courbes de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane (angle d'incidence de 30 degrés par rapport à la normale) sur un réseau linéaire de rubans métalliques espacés de  $0,5\lambda_0$  et sans substrat diélectrique. Résultats avec la méthode des lignes pour 5 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [24]. . . . . 86
- 3.6 Courbes de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane (angle d'incidence de 30 degrés par rapport à la normale) sur un réseau linéaire de rubans métalliques espacés de  $0,5\lambda_0$  et déposés sur un substrat diélectrique de permittivité  $\epsilon_r = 2$  et d'épaisseur  $d = 0,1\lambda_0$ . Résultats avec la méthode des lignes pour 5 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [24]. . . . . 87
- 3.7 Courbes de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane à incidence normale sur un réseau planaire de plaques métalliques sans substrat. Cas sans erreur de discrétisation effective ( $N_x$  et  $N_z$  impairs). 93
- 3.8 Courbes de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane à incidence normale sur un réseau planaire de plaques métalliques sans substrat. Cas avec erreurs de discrétisation systématiques ( $N_x$  et  $N_z$  pairs). . . . . 94

3.9	Courbes de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane à incidence normale sur un réseau planaire de plaques métalliques déposées sur un substrat de permittivité $\epsilon_r = 3,5$ et d'épaisseur $d = 0,1$ cm. Cas sans erreur de discrétisation effective ( $N_x$ et $N_z$ impairs).	95
3.10	Courbes de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane à incidence normale sur un réseau planaire de plaques métalliques déposées sur un substrat de permittivité $\epsilon_r = 3,5$ et d'une épaisseur $d = 0,1$ cm. Cas avec erreurs de discrétisation systématique ( $N_x$ et $N_z$ pairs).	96
3.11	Courbes de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane à incidence normale sur un réseau planaire de plaques métalliques déposées sur un substrat de permittivité $\epsilon_r = 3,5$ et d'une épaisseur $d = 0,2$ cm. Cas sans erreur de discrétisation effective ( $N_x$ et $N_z$ impairs).	97
3.12	Courbes de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane à incidence normale sur un réseau planaire de plaques métalliques déposées sur un substrat de permittivité $\epsilon_r = 3,5$ et d'une épaisseur $d = 0,2$ cm. Cas avec erreurs de discrétisation systématique ( $N_x$ et $N_z$ pairs).	98
4.1	Source de tension idéale distribuée aux bornes d'une fente	101
4.2	Courbes de l'amplitude du coefficient de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle $\alpha$ de balayage du faisceau dans le plan E ( $\psi = 0^\circ$ ) pour le cas comportant un <i>substrat mince</i> . Résultat obtenu par la méthode des lignes avec 4 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [17].	107

- 4.3 Courbes de l'amplitude du coefficient de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan D ( $\psi = 45^\circ$ ) pour le cas comportant un *substrat mince*. Résultat obtenu par la méthode des lignes avec 4 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [17]. . . . . 108
- 4.4 Courbes de l'amplitude du coefficient de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan H ( $\psi = 90^\circ$ ) pour le cas comportant un *substrat mince*. Résultat obtenu par la méthode des lignes avec 4 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [17]. . . . . 109
- 4.5 Courbes de l'amplitude du coefficient de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan E ( $\psi = 0^\circ$ ) pour le cas comportant un *substrat épais*. Résultat obtenu par la méthode des lignes avec 4 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [17]. . . . . 111
- 4.6 Courbes de l'amplitude du coefficient de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan D ( $\psi = 45^\circ$ ) pour le cas comportant un *substrat épais*. Résultat obtenu par la méthode des lignes avec 4 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [17]. . . . . 112

4.7	Courbes de l'amplitude du coefficient de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle $\alpha$ de balayage du faisceau dans le plan H ( $\psi = 90^\circ$ ) pour le cas comportant un <i>substrat épais</i> . Résultat obtenu par la méthode des lignes avec 4 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [17]. . . . .	113
4.8	Courbes de l'amplitude du coefficient de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle $\alpha$ de balayage du faisceau dans le plan E ( $\psi = 0^\circ$ ) pour le cas comportant un <i>substrat épais</i> et le couplage d'un lobe discordant. Résultat obtenu par la méthode des lignes avec 4 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [17]. . . . .	115
4.9	Courbes de l'amplitude du coefficient de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle $\alpha$ de balayage du faisceau dans le plan D ( $\psi = 45^\circ$ ) pour le cas comportant un <i>substrat épais</i> et le couplage d'un lobe discordant. Résultat obtenu par la méthode des lignes avec 4 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [17]. . . . .	116
4.10	Courbes de l'amplitude du coefficient de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle $\alpha$ de balayage du faisceau dans le plan H ( $\psi = 90^\circ$ ) pour le cas comportant un <i>substrat épais</i> et le couplage d'un lobe discordant. Résultat obtenu par la méthode des lignes avec 4 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [17]. . . . .	117
4.11	Antenne plaque couplée par fente constituant l'un des éléments d'un réseau périodique. . . . .	118
4.12	Circuit équivalent d'une fente couplée à une ligne microruban (figure inspirée de [16]) . . . . .	119

4.13	Simulateur de réseau périodique (figure inspirée de [16]) . . . . .	130
4.14	Courbes de l'impédance (résistance $R$ et réactance $X$ ) à l'entrée de la ligne microruban en fonction de la fréquence pour une antenne plaque couplée par fente placée dans un guide d'onde (simulateur de réseau périodique). . . . .	133
4.15	Courbes normalisées par rapport à la fréquence de résonance de l'impédance (résistance $R$ et réactance $X$ ) à l'entrée de la ligne microruban en fonction de la fréquence pour une antenne plaque couplée par fente placée dans un guide d'onde (simulateur de réseau périodique). . . . .	134
4.16	Antenne à deux résonateurs plaques couplés par fente constituant l'un des éléments d'un réseau périodique. . . . .	135
4.17	Courbes de l'impédance (résistance $R$ et réactance $X$ ) à l'entrée de la ligne microruban en fonction de la fréquence pour une antenne à deux résonateurs placée dans un guide d'onde (simulateur de réseau périodique à deux fréquences d'opération). . . . .	137
4.18	Courbe de l'amplitude du coefficient $S_{11}$ de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle $\alpha$ de balayage du faisceau dans le plan E ( $\psi = 0^\circ$ ) à l'entrée d'une ligne microruban alimentant l'une des fentes du réseau périodique. Résultat obtenu avec la méthode des lignes avec 3 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point et nombre d'inconnues. Validation avec [16]. . . . .	140
4.19	Courbe de l'amplitude du coefficient $S_{11}$ de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle $\alpha$ de balayage du faisceau dans le plan D ( $\psi = 45^\circ$ ) à l'entrée d'une ligne microruban alimentant l'une des fentes du réseau périodique. Résultat obtenu avec la méthode des lignes avec 3 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point et nombre d'inconnues. Validation avec [16]. . . . .	141

- 4.20 Courbe de l'amplitude du coefficient  $S_{11}$  de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan H ( $\psi = 90^\circ$ ) à l'entrée d'une ligne microruban alimentant l'une des fentes du réseau périodique. Résultat obtenu avec la méthode des lignes avec 2 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point et nombre d'inconnues. Validation avec [16]. . . . . 142
- 4.21 Courbe de l'amplitude du coefficient  $\Gamma_P$  de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan E ( $\psi = 0^\circ$ ) à l'entrée d'une ligne microruban alimentant l'une des fentes du réseau périodique. Résultat obtenu avec la méthode des lignes avec 3 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point et nombre d'inconnues. Validation avec [16]. . . . . 143
- 4.22 Courbe de l'amplitude du coefficient  $\Gamma_P$  de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan D ( $\psi = 45^\circ$ ) à l'entrée d'une ligne microruban alimentant l'une des fentes du réseau périodique. Résultat obtenu avec la méthode des lignes avec 3 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point et nombre d'inconnues. Validation avec [16]. . . . . 144
- 4.23 Courbe de l'amplitude du coefficient  $\Gamma_P$  de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan H ( $\psi = 90^\circ$ ) à l'entrée d'une ligne microruban alimentant l'une des fentes du réseau périodique. Résultat obtenu avec la méthode des lignes avec 2 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point et nombre d'inconnues. Validation avec [16]. . . . . 145
- 4.24 Densité de courant électrique  $J_z$  en Ampères/m au niveau du résonateur plaque . . . . . 146
- 4.25 Densité de courant électrique  $J_z$  en Ampères/m au niveau du résonateur plaque . . . . . 147

4.26	Champ électrique $E_x$ en V/m au niveau du résonateur plaque . . . .	148
4.27	Champ électrique $E_z$ en V/m au niveau du résonateur plaque . . . .	149



## LISTE DES SIGLES ET ABBRÉVIATIONS

Bi-CGSTAB2	méthode modifiée des gradients au carré bi-conjugués avec stabilisation ( <i>modified Biconjugate Gradient Squared method with STABilization</i> )
CGFFT	méthode des gradients conjugués avec transformée rapide de Fourier ( <i>Conjugate Gradient Fast Fourier Transform method</i> )
ITFR2D	transformée rapide de Fourier inverse à deux variables
FTP	protocole de transfert de fichiers ( <i>File Transfer Protocol</i> )
GHz	Giga-hertz
LU	algorithme de décomposition LU ( <i>Lower triangular, Uper triangular</i> )
SSF	surface à sélection de fréquences
PCG	méthode des gradients conjugués avec pré-conditionnement ( <i>Preconditioned Conjugate Gradient</i> )
RN	résidu normalisé
RNC	résidu normalisé cible
TE	transversal électrique
TEM	transversal électromagnétique
TFD	transformée de Fourier discrète
TFR2D	transformée rapide de Fourier directe à deux variables
TM	transversal magnétique

## LISTE DES ANNEXES

<b>Annexe I :</b>	<b>Diagonalisation de l'opérateur normalisé <math>D_n</math> de différences finies centrées</b>	<b>163</b>
<b>Annexe II :</b>	<b>Identités utiles</b>	<b>166</b>
II.1	Inversion de $\overline{Z}_m$	166
II.2	Identité 1	167

## INTRODUCTION

Le projet de maîtrise qui fait l'objet de ce mémoire vise à investiguer l'utilisation de la *méthode des lignes* [19] comme alternative à la *méthode des moments* pour la modélisation numérique du comportement électrique de réseaux périodiques multicouches comportant des motifs métalliques imprimés.

Deux applications en particulier sont visées. La première est la modélisation des antennes à réseaux destinées aux satellites à basse orbite desservant les réseaux de télécommunications mobiles. C'est cette application qui a, *a priori*, motivé la mise sur pied de ce projet. La seconde application est la modélisation de surfaces à sélection de fréquences. Le mode d'excitation des structures pour cette application présente moins de problèmes techniques liés à la modélisation numérique. C'est pourquoi elle a été choisie pour effectuer la validation initiale du modèle général. Il n'en demeure pas moins que la technique développée permettra d'analyser autant les réseaux d'antennes que les surfaces à sélection de fréquences.

Les deux sections qui suivent présentent chacune des deux applications considérées. La troisième section, pour sa part, aborde la technique d'analyse employée. Finalement, la quatrième section présente la structure du mémoire.

### **Les réseaux d'antennes imprimées pour les télécommunications mobiles**

L'industrie des télécommunications est présentement le théâtre du développement de nombreux projets de constellations de satellites à basse orbite destinés à l'établissement d'un réseau global de communications à travers le monde. La viabilité des télécommunications mobiles par satellite dépend en grande partie de l'accessibilité des terminaux d'utilisateurs, qui doivent être très abordables en plus d'être compacts. Ces critères d'accessibilité amènent l'industrie à transférer la plus grande portion possible de la complexité et des exigences de performances (i.e. le gain) vers les antennes opérant à bord des satellites, afin de permettre l'opération du système malgré

le faible gain des antennes mobiles. En somme, ces systèmes vont exiger de l'antenne installée à bord d'un satellite qu'elle réponde à des spécifications particulières, dont voici quelques-unes des plus importantes :

- l'antenne doit être compacte et relativement légère ;
- l'antenne doit fournir un gain élevé afin de permettre la liaison avec les antennes à faible gain des utilisateurs ;
- l'antenne doit permettre un balayage du faisceau sur une large plage angulaire.

Pour satisfaire aux exigences de gain élevé tout en conservant une masse et un volume réduits, l'utilisation de grands réseaux d'antennes imprimées [13] apparaît comme l'une des meilleures solutions pour les antennes à bord des satellites de télécommunications. En effet, les grands réseaux d'antennes imprimées présentent un volume et une masse réduite tout en permettant d'atteindre de hauts niveaux de gains. Les réseaux considérés sont typiquement composés d'une grille de  $100 \times 100$  éléments (10 000 au total). Le balayage de la phase entre ces éléments permet de satisfaire l'exigence relative au balayage du faisceau principal.

La technique classique d'analyse de réseaux d'antennes consiste à multiplier le facteur de réseau par le diagramme de rayonnement d'un élément isolé [22]. Cette technique est basée sur la supposition que les éléments du réseau ne sont pas couplés entre eux. Or, la validité de cette hypothèse diminue à mesure que la direction du faisceau principal du réseau d'antennes s'éloigne de l'incidence normale, car l'excitation des ondes de surface se propageant dans le substrat du réseau devient alors importante, ce qui résulte en un couplage non négligeable entre les éléments. L'impédance d'entrée des éléments du réseau varie considérablement en fonction de la direction de balayage du faisceau principal, et pour certaines directions il est même quasiment impossible d'émettre de la puissance car l'onde de surface entre en résonance forcée ; c'est ce qu'on appelle le phénomène d'aveuglement <sup>1</sup>. Pour modéliser adéquatement

---

<sup>1</sup>Traduit du terme anglais *Scan blindness phenomena*

les champs électromagnétiques dans une telle structure, il faut donc employer une approche rigoureuse prenant en compte tous les phénomènes électromagnétiques, y compris le couplage aux ondes de surface.

Pour les grands réseaux considérés, l'environnement de la majorité des éléments est sensiblement le même, exception faite des éléments près du bord. La connaissance du comportement des éléments centraux d'un grand réseau d'antennes imprimées en ce qui a trait à leur impédance d'entrée permet de guider la conception d'un tel réseau. Une approximation courante utilisée pour modéliser l'un des éléments centraux d'un grand réseau consiste à considérer qu'il se trouve au centre d'un réseau périodique comportant un nombre infini d'éléments rayonnants. Plusieurs publications existantes ([2], [16], [17] et [18]) présentent des modèles rigoureux de réseaux périodiques d'antennes imprimées basés sur la méthode des moments.

Tout comme les auteurs de ces publications, nous nous intéresserons à la modélisation de réseaux périodiques d'antennes, bien que l'approche employée soit différente. Le mode d'alimentation utilisé est le couplage par fente ([15] et [23]). La technique présentée dans [15] et utilisant le principe de réciprocité est utilisée afin de modéliser le couplage à la fente comme une impédance série le long de la ligne microruban alimentant la fente en question.

### **Les surfaces à sélection de fréquences**

Les surfaces à sélection de fréquences peuvent être employées dans la conception d'antennes comme radômes, lentilles ou réflecteurs. De plus, elles sont appelées à servir dans des systèmes de séparation de canaux [4]. Les SSF<sup>2</sup> sont des structures planes, possiblement multicouches, composées d'un ou de plusieurs substrats diélectriques surmontés d'éléments métalliques. Elles agissent comme filtres de fréquences sur les ondes incidentes.

---

<sup>2</sup>Surfaces à sélection de fréquences

L'analyse de SSF périodiques (de taille infinie) permet de procéder à la conception de SSF de grande taille. Le mode d'excitation des SSF est relativement simple ; il consiste en une onde plane incidente (on suppose que la source est située en champ lointain) sur la structure. La simplicité du mode d'excitation permettra de procéder à une validation initiale du modèle développé dans le cadre de ce travail, car la source ne pose pas de problèmes de discrétisation. Nous nous intéresserons à la variation des coefficients de réflexion et de transmission d'une onde incidente sur la structure.

### **Approche considérée pour l'analyse des réseaux périodiques multicouches**

L'analyse rigoureuse de réseaux périodiques d'antennes plaques ( [2], [16], [17], et [18] ) et de surfaces à sélection de fréquence ( [10], [24]) a déjà été effectuée par différents auteurs au moyen d'autres techniques de modélisation basées sur la méthode des moments. L'objectif du présent travail est d'investiguer l'utilisation de la méthode des lignes [19] pour la modélisation de ces problèmes, en vue de permettre l'analyse éventuelle de problèmes plus complexes. La méthode développée aura un caractère plus général, permettant l'analyse de réseaux périodiques multicouches comportant des motifs métalliques quelconques. Une étude préliminaire de cette technique, effectuée à partir d'un réseau périodique de bandes métalliques excitées par fentes et demandant une discrétisation selon une seule direction, a été présenté préalablement dans [6].

La méthode des lignes est particulièrement adaptée aux problèmes comportant des structures planaires multicouches. Par son caractère semi-analytique, elle est beaucoup plus efficace pour l'analyse de problèmes stratifiés que les méthodes numériques basées sur la discrétisation volumique. En effet, la méthode des lignes consiste à discrétiser les champs et les courants sur chacune des interfaces de la structure multicouche et à procéder à une résolution analytique selon la direction normale aux interfaces. Le nombre d'inconnus générés n'est donc pas proportionnel aux volume

de la structure, mais à la surface et au nombre des interfaces comportant un motif métallique.

Un autre des avantages de la méthode des lignes est qu'elle comporte une formulation relativement simple, beaucoup moins dépendante de la géométrie de la structure que ne le sont les méthodes spectrales. Contrairement à ces dernières, elle ne nécessite pas de connaissance préalable des modes de solution possibles ni de fonctions de Green. De plus, le problème d'intégration des singularités que posent les méthodes spectrales n'est pas rencontré avec la méthode des lignes.

Le coût de cette simplicité de traitement, par rapport à l'utilisation de la méthode des moments, est l'accroissement de la taille mémoire et du temps de calcul nécessaires à la résolution des systèmes d'équations engendrés. Or, l'objectif sous-jacent de la présente investigation est de *réduire de façon importante les besoin en mémoire et en temps de calcul* normalement associés à l'utilisation de la méthode des lignes pour les structures demandant une discrétisation planaire (structures longitudinalement inhomogènes [19]). On tentera d'atteindre cet objectif en combinant l'exploitation des propriétés des structures périodiques et l'utilisation de méthodes itératives de résolution de systèmes d'équations.

Dans le but de développer un modèle le plus général possible, la formulation du problème général de structure plane multicouche résultant en un système d'équations homogène sera abordée séparément de la définition des sources servant à exciter la structure. Ainsi, différents modèles de sources pourront être développées afin d'exciter la structure. Dans le cadre de ce travail, deux modèles de source ont été développés. Le premier est une source d'onde plane incidente servant à la modélisation de surfaces à sélection de fréquences. Le second est une source composée d'une ligne microruban alimentant un résonateur plaque couplé par fentes.

## Structure du mémoire

Dans un premier temps, au chapitre 1, on définira le problème considéré et les deux applications majeures étudiées, soit les surfaces à sélection de fréquences et les réseaux périodiques d'antennes plaques. Puis, on procédera au chapitre 2 à la formulation générale du problème générique de structure plane multicouche au moyen de la méthode des lignes. C'est dans ce chapitre que la technique de réduction des exigences de taille mémoire et du temps de calcul sera développée.

Au chapitre 3, on formulera un modèle de source permettant d'exciter le modèle générique afin de modéliser des surfaces à sélection de fréquence ; les résultats obtenus ainsi que la comparaison avec les données des publications disponibles seront aussi présentés. Ensuite, on développera au chapitre 4 un second modèle de source servant à modéliser, de concert avec le modèle générique de structure multicouche, des réseaux périodiques multicouches d'antennes plaques couplées par fente et pouvant comporter de multiples résonateurs. Des résultats des simulations seront comparés avec les données publiées et une validation du modèle à partir de mesures expérimentales réalisées par l'auteur de [16] sera effectuée pour le cas d'un simulateur à guide d'onde <sup>3</sup>.

Finalement, la conclusion présentera les problèmes rencontrés, les principales contributions et les travaux ultérieurs possibles.

---

<sup>3</sup>Un simulateur à guide d'onde est un montage expérimental permettant d'émuler le fonctionnement d'un réseau périodique d'antennes de taille infinie.



## CHAPITRE 1

### DÉFINITION DU PROBLÈME

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons à la modélisation de structures planes multicouches, en particulier les surfaces à sélection de fréquence et les grands réseaux d'antennes imprimées. Ce chapitre vise à définir les deux types de structures étudiées. Nous verrons d'abord la définition générale de la structure, qui s'applique tant à l'étude des réseaux d'antennes qu'à celle des surfaces à sélection de fréquence. Puis nous définirons les sources d'alimentation distinguant les deux types de structures étudiées.

#### 1.1 Structure plane multicouche générale

Les applications considérées, telles les antennes de satellite destinées aux communications mobiles terrestres, font appel à de très grandes structures, comportant des milliers voire des dizaines de milliers d'éléments. C'est pourquoi nous emploierons l'hypothèse simplificatrice consistant à considérer que les éléments centraux d'un grand réseau se comportent comme s'ils se trouvaient au sein d'un réseau périodique, de taille infinie, auquel on appliquerait une excitation uniforme en amplitude et dont la phase varierait linéairement d'un élément à l'autre. Cette hypothèse nous permet de réduire l'analyse d'une surface à sélection de fréquence ou d'un grand réseau d'antennes imprimées à l'analyse d'une seule cellule du réseau périodique. Il suffit de considérer que les champs et les courants sont, à une phase près, périodiques.

La topologie générale de la cellule étudiée (figure 1.1) est constituée d'une superposition de plusieurs couches de permittivités différentes intercalées de couches métalliques minces à motif arbitraire. Bien que la méthode des lignes permette l'analyse d'un motif quelconque, nous nous limiterons dans le cadre de ce travail à des

imprimés de formes rectangulaires, que ce soit des fentes dans un plan conducteur ou des plaques métalliques.

Les surfaces du haut et du bas de la structure sont, en général, assujetties à des conditions aux frontières absorbantes, ce qui signifie qu'aucune onde électromagnétique ne provient de l'extérieur de la structure. Néanmoins, tel qu'il sera vu aux sections suivantes, certains types de sources peuvent imposer des conditions aux frontières différentes de la condition absorbante sur l'une ou l'autre des faces de la structure. Pour simuler l'effet de la présence des cellules voisines sur la cellule étudiée, on applique sur les faces latérales de la cellule des conditions aux frontières de périodicité. Les champs et les courants sont donc périodiques à une phase près, de façon à représenter une variation linéaire de l'excitation des éléments en fonction de leur position. Le chapitre 2 présente la formulation générale de cette structure multicouche.

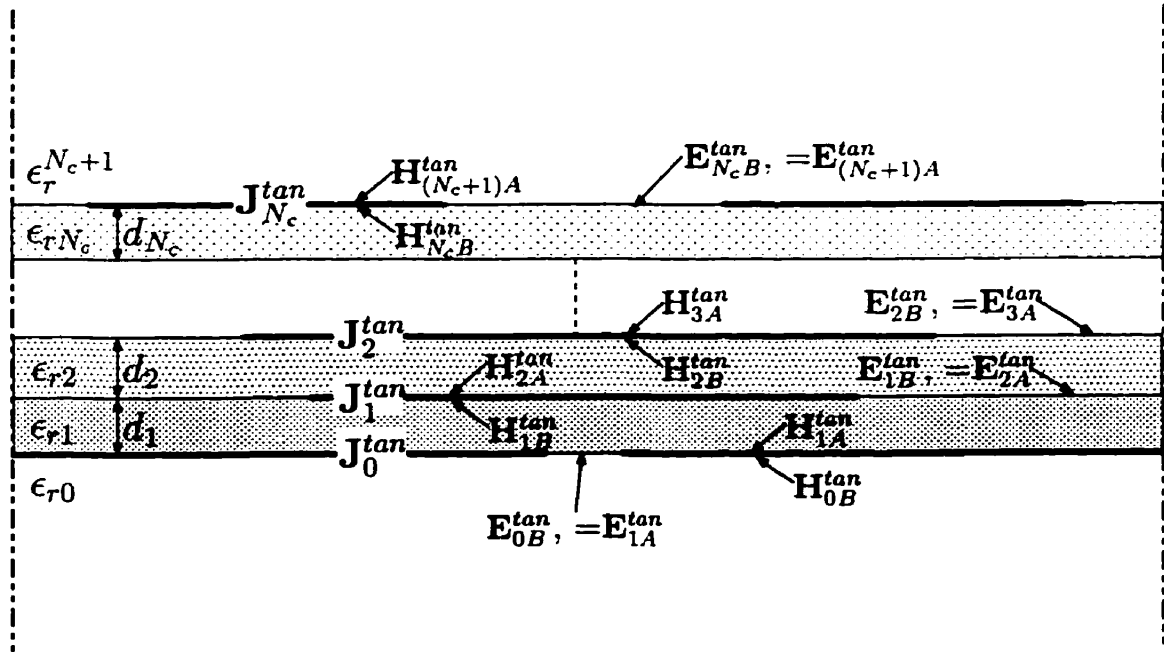


Figure 1.1: Topologie générale de la cellule multicouche étudiée et notation employée

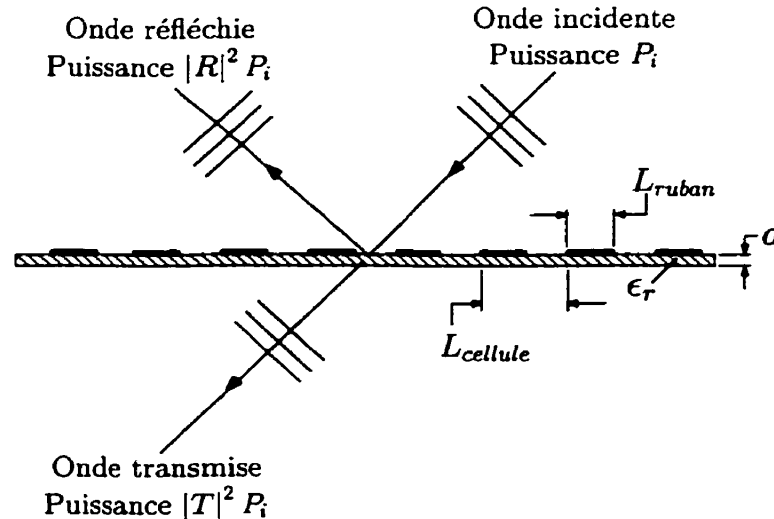
## 1.2 Excitation d'une surface à sélection de fréquences

Dans le cas d'une surface à sélection de fréquences, on s'intéresse à la réponse de la structure à une onde plane incidente. La source du problème physique est donc simplement une onde plane incidente sur la structure périodique, tel qu'illustré à la figure 1.2. L'angle d'incidence de l'onde plane définit le déphasage imposé entre les deux parois latérales de la cellule ; les champs normalisés par rapport à ce déphasage seront donc périodiques.

L'approche proposée permettra de faire l'analyse de SSF<sup>1</sup> multicouche, bien que des structures relativement simples à une et deux couches seront considérées afin de valider les résultats obtenus à partir de publications antérieures. Le chapitre 3 présente le modèle de source associé aux SSF et les résultats de simulation obtenus.

---

<sup>1</sup>Surfaces à sélection de fréquences

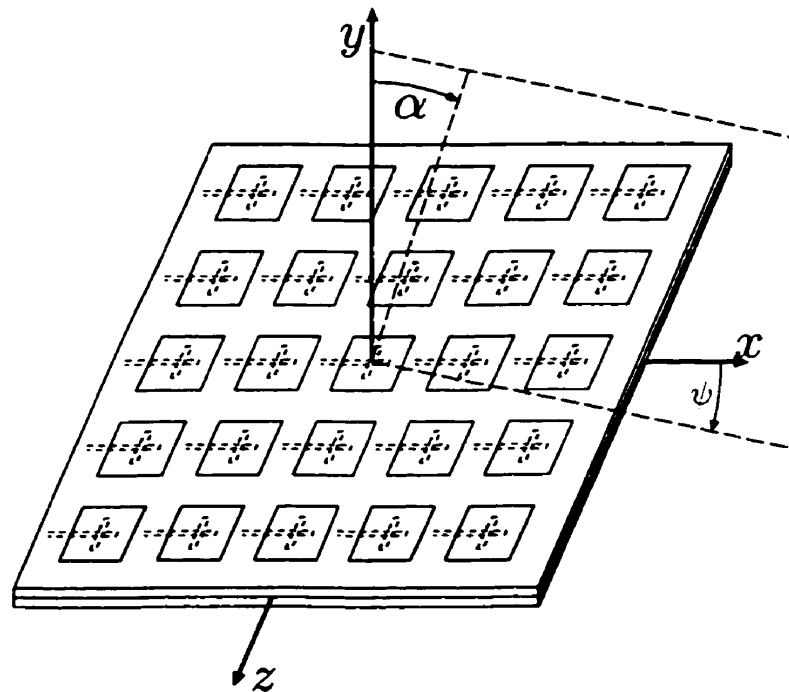


**Figure 1.2:** Topologie particulière d'une Surface à sélection de fréquences (SSF) - coupe transversale

### 1.3 Excitation d'un réseau périodique d'antennes plaques couplées par fentes

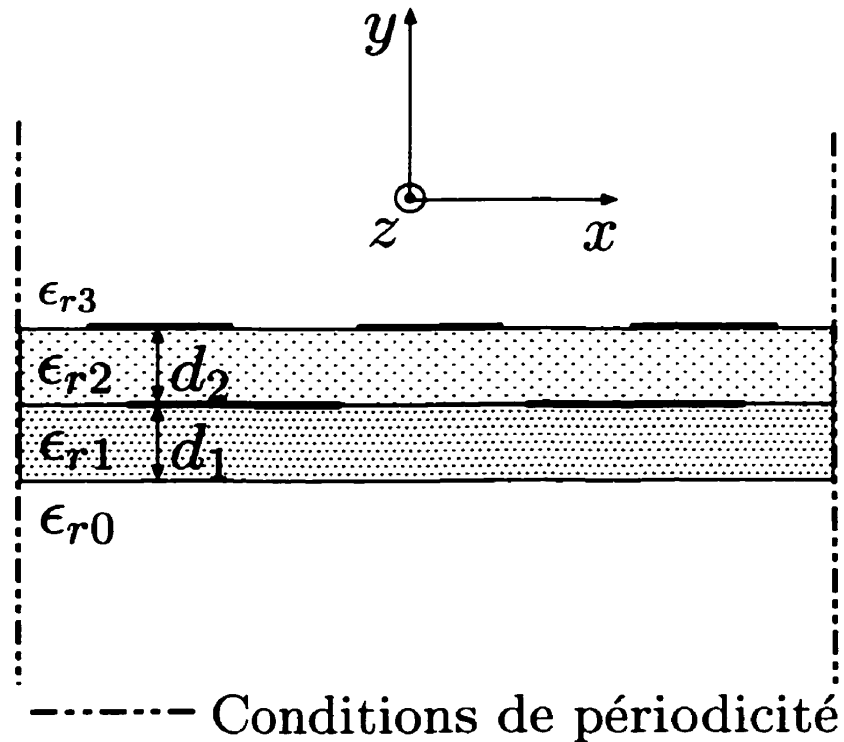
Le type de structures de réseaux d'antennes plaques que nous considérerons ici (voir figure 1.3) sera constitué de résonateurs (les plaques) alimentés par couplage à des lignes microruban à travers des fentes pratiquées dans un plan de masse situé sous les résonateurs.

Encore une fois, l'approche préconisée permet de considérer des antennes multicouche comportant plusieurs résonateurs étagés, voire même deux réseaux d'antennes superposés opérant à des fréquences différentes (voir figure 1.4). Dans ce dernier cas, cependant, la cellule considérée devrait inclure plusieurs éléments des deux réseaux, de façon à former une période égale au plus petit commun multiple entier des périodes des deux réseaux superposés.



**Figure 1.3:** Topologie particulière d'un réseau périodique d'antennes plaques couplées par fentes

Toutefois, aux fins de la validation de la méthode d'analyse proposée, seuls des réseaux d'antennes à un et deux niveaux de résonateurs comportant un élément par cellule seront testés. Le chapitre 4 présente le modèle de source associé et les résultats de simulation obtenus.



**Figure 1.4:** Exemple de combinaison de deux réseaux périodiques à des fréquences différentes : le plus petit commun multiple des périodes inclut deux éléments du réseau inférieur (basse fréquence) et trois éléments du réseau supérieur (haute fréquence)

## CHAPITRE 2

### FORMULATION GÉNÉRALE DU PROBLÈME DE STRUCTURE PLANAIRE MULTICOUCHE

Dans ce chapitre, nous chercherons à formuler le problème général décrit à la section 1.1 sous forme d'un système d'équations ayant pour inconnues les échantillons de densité de courant et/ou de champ électrique aux interfaces entre les couches diélectriques, c'est-à-dire là où se trouvent les couches métalliques minces à motifs arbitraires. Nous emploierons pour ce faire la méthode des lignes, telle que développée dans [19]. Les sections 2.1 à 2.5 sont inspirées de [19], mais plusieurs développements supplémentaires y sont effectués afin de confirmer la validité de chacune des équations tirées de cette référence. Par contre, les développements effectués aux sections 2.6 à 2.11 proviennent de la formulation particulière adoptée par l'auteur et ont été obtenus indépendamment. À la connaissance de l'auteur, la formulation d'un problème périodique multicouche réalisée dans ce chapitre est inédite. C'est pour cette raison que les développements sont effectués de façon détaillée.

#### 2.1 Principes de base de la méthode des lignes

Le type de problème considéré est d'une taille comparable à la longueur d'onde, puisqu'on considère des éléments rayonnants qui doivent opérer à des fréquences proches de la résonance. Il n'est donc pas possible d'employer l'approximation «basse fréquence» des approches dites *statiques*, qui consiste à considérer que la taille de la structure est petite par rapport à la longueur d'onde. De même, on ne peut considérer l'approximation «haute fréquence» des méthodes dites *asymptotiques*, appropriée pour les structures électriquement très grandes.

La méthode des lignes ne considère ni l'une ni l'autre de ces approximations, c'est

pourquoi elle fait partie des méthodes dites à «onde pleine»<sup>1</sup> prenant en compte tous les modes hybrides, tout comme les diverses versions de la méthode des moments. Elle diffère toutefois de cette dernière par la nature de l'approximation sur laquelle elle est basée. Alors que la méthode des moments s'appuie sur l'approximation des champs et/ou des courants par des fonctions de base, la méthode des lignes consiste à approcher certains opérateurs différentiels de l'équation de Helmholtz par des équations aux différences finies, comme nous le verrons à la section suivante.

Ce qui distingue la méthode des lignes de la méthode dite des différences finies, c'est que l'on ne fait d'approximation que pour deux des trois opérateurs différentiels de l'équation de Helmholtz. Il s'agit donc d'une méthode *semi-analytique*. Elle est particulièrement appropriée pour l'analyse des structures planaires multicouches, dans lesquelles chacune des couches est homogène selon la direction normale aux couches, permettant ainsi l'utilisation d'un opérateur de différences finies uniforme sur toute l'épaisseur d'une couche diélectrique.

## 2.2 Discrétisation de l'équation de Helmholtz

Dans chacune des couches distinctes de la cellule illustrée à la figure 2.1, l'ensemble des solutions possibles pour les champs électromagnétiques peuvent être exprimées en termes de modes transversal électrique ( $TE$ ) et transversal magnétique ( $TM$ ) par rapport à une direction arbitraire, tous orthogonaux les uns par rapport aux autres. Dans ce mémoire, on utilisera la direction  $z$  comme référence, de sorte que les champs seront décrits par rapport aux modes  $TE_z$  et  $TM_z$ . Puisque les couches diélectriques sont homogènes et isotropes, l'équation d'onde provenant du couplage des équations de Maxwell [1] s'applique directement aux composantes de champs

---

<sup>1</sup>Tiré de l'anglais *full wave*

électrique  $e_z(x, y, z)$  et magnétique  $h_z(x, y, z)$  :

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial z^2} + \epsilon_r k_0^2 e_z = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial z^2} + \epsilon_r k_0^2 h_z = 0 \quad (2.2)$$

où  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  et  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide. Tel que décrit dans [1], la relation entre les composantes des potentiels vecteurs électrique  $A_z$  et magnétique  $F_z$  et les composantes de champ  $e_z$  et  $h_z$  dépend du choix arbitraire des potentiels scalaires électrique  $\phi_e$  et magnétique  $\phi_m$  :

$$e_z(x, y, z) = -\nabla \phi_e - j\omega A_z(x, y, z) \quad (2.3)$$

$$h_z(x, y, z) = -\nabla \phi_m - j\omega F_z(x, y, z) \quad (2.4)$$

Puisque l'homogénéité de la permittivité électrique dans une couche nous permet d'écrire (2.1) et (2.2) en fonction des composantes  $z$  de champ directement, il n'est pas nécessaire de choisir des potentiels  $A_z$  et  $F_z$  qui respectent l'équation d'onde. On choisira donc simplement  $\phi_e = 0$  et  $\phi_m = 0$  et on utilisera les composantes de champ  $e_z$  et  $h_z$  comme fonctions de potentiels des modes  $TM_z$  et  $TE_z$ . Ce choix concorde avec celui effectué dans [19], de sorte que la notation employée est compatible avec celle de cette référence.

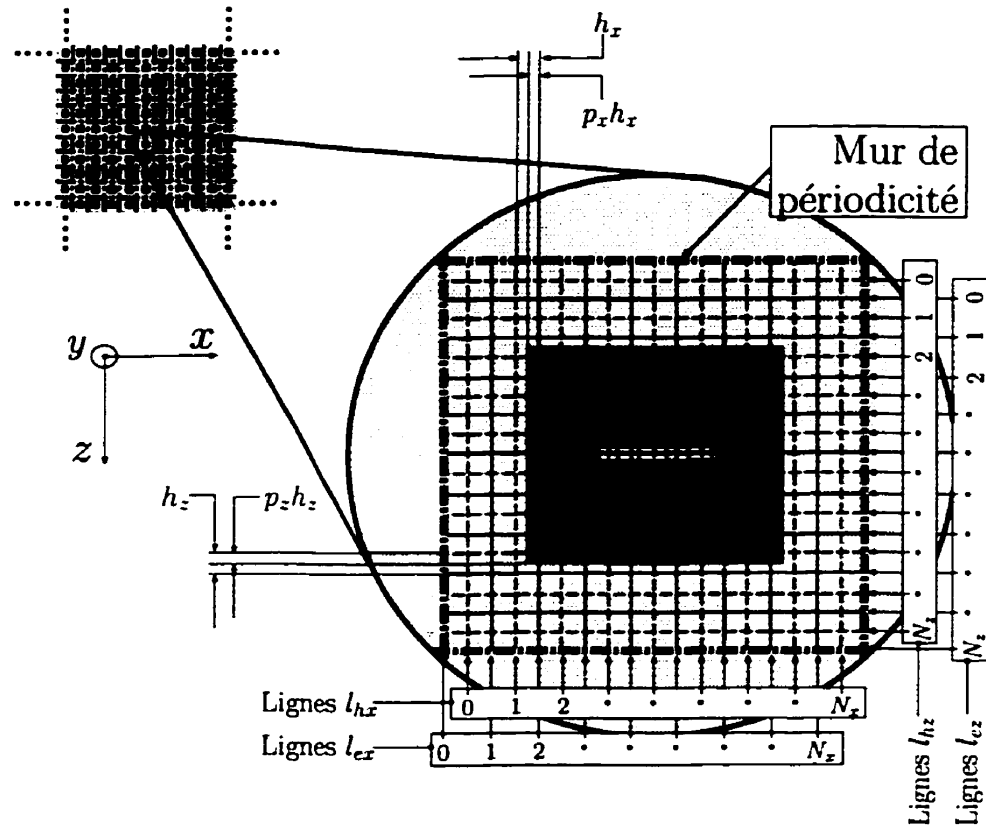
La figure 2.1 illustre les ensembles décalés de lignes uniformément espacées le long desquelles seront échantillonnés les champs. En plus de permettre un choix optimal du positionnement des bords métalliques et de réduire l'erreur de discrétisation, le décalage entre les ensembles de lignes résulte en une formulation plus simple [19]. La composante de champ électrique  $e_z(x, z)$  sera échantillonnée aux points de croisement des lignes  $l_{ex}$  et  $l_{ez}$ , tandis que la composante de champ magnétique  $h_z(x, z)$  sera échantillonnée aux points de croisement des lignes  $l_{hx}$  et  $l_{hz}$ . Dans ce qui suit, on notera  $\mathbf{E}_z$  et  $\mathbf{H}_z$ , respectivement, les matrices contenant les valeurs discrétisées des



champs  $e_z$  et  $h_z$  :

$$\mathbf{E}_z(i_x, i_z) = e_z((i_x - 1)\Delta_x, (i_z - 1)\Delta_z), \quad \text{avec } i_x = 1, 2, \dots, N_x \quad (2.5)$$

$$\text{et } i_z = 1, 2, \dots, N_z$$



**Figure 2.1:** Discrétisation d'une cellule d'un réseau périodique avec nomenclature employée pour les lignes

$$\mathbf{H}_z(i_x, i_z) = h_z ((i_x - 0,5)\Delta_x, (i_z - 0,5)\Delta_z), \quad \text{avec } i_x = 1, 2, \dots, N_x \quad (2.6)$$

et  $i_z = 1, 2, \dots, N_z$

- où :
- $i_x$  est le numéro de la ligne  $l_{ex}$  ou  $l_{hx}$
  - $i_z$  est le numéro de la ligne  $l_{ez}$  ou  $l_{hz}$
  - $\Delta_x$  est l'espacement entre les lignes  $l_{ex}$  successives et entre les lignes  $l_{hx}$  successives
  - $\Delta_z$  est l'espacement entre les lignes  $l_{ez}$  successives et entre les lignes  $l_{hz}$  successives
  - $N_x$  est le nombre de lignes  $l_{ex}$  et  $l_{hx}$
  - et  $N_z$  est le nombre de lignes  $l_{ez}$  et  $l_{hz}$

Tel qu'expliqué à la section 2.1, les opérateurs différentiels  $\frac{\partial}{\partial x}$  et  $\frac{\partial}{\partial z}$ , agissant dans le plan d'empilement des couches diélectriques, seront discrétisés, tandis que l'on conservera sous forme analytique l'opérateur différentiel  $\frac{\partial}{\partial y}$ . Les conditions aux frontières latérales de périodicité sont intégrées à même les opérateurs de différences finies. L'excitation des cellules de tout le réseau périodique a une amplitude uniforme et une phase qui varie linéairement avec  $x$  et  $z$ . Selon le théorème de Floquet, une telle excitation résultera en une solution périodique des champs, à une phase près, soit le déphasage entre les excitations de deux cellules voisines :

$$\mathbf{E}_z(i_x + N_x, i_z) = e^{-jk_{x0}L_x} \mathbf{E}_z(i_x, i_z) \quad (2.7)$$

$$\mathbf{E}_z(i_x, i_z + N_z) = e^{-jk_{z0}L_z} \mathbf{E}_z(i_x, i_z) \quad (2.8)$$

$$\mathbf{H}_z(i_x + N_x, i_z) = e^{-jk_{x0}L_x} \mathbf{H}_z(i_x, i_z) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{H}_z(i_x, i_z + N_z) = e^{-jk_{z0}L_z} \mathbf{H}_z(i_x, i_z) \quad (2.10)$$

où  $k_{x0}L_x$  et  $k_{z0}L_z$  représentent le déphasage entre les excitations des cellules dans les directions  $x$  et  $z$ , respectivement. Les expressions des équations (2.7) et (2.8) sont employées pour approcher les opérateurs différentiels appliqués sur  $e_z$  par des différences

finies centrées. Ainsi, la dérivée du champ  $\frac{\partial e_z}{\partial x}$  est approchée par  $\frac{\partial e_z}{\partial x}(x_{i_x}, z_{i_z}) \cong \mathbf{E}_z^{dx}(i_x, i_z)$  où  $x_{i_x} = (i_x - 0,5)\Delta_x$  avec  $i_x = 1, 2, \dots, N_x$ ,  $z_{i_z} = (i_z - 1)\Delta_z$  avec  $i_z = 1, 2, \dots, N_z$  et :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_z^{dx}(1, i_z) \\ \mathbf{E}_z^{dx}(2, i_z) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{E}_z^{dx}(N_x, i_z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_x} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 1 \\ e^{-jk_{x0}L_x} & & & & & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_x(N_x \times N_x)} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_z(1, i_z) \\ \mathbf{E}_z(2, i_z) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{E}_z(N_x, i_z) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

De même,  $\frac{\partial e_z}{\partial z}$  est approchée par  $\frac{\partial e_z}{\partial z}(x_{i_x}, z_{i_z}) \cong \mathbf{E}_z^{dz}(i_x, i_z)$  où  $x_{i_x} = (i_x - 1)\Delta_x$  avec  $i_x = 1, 2, \dots, N_x$ ,  $z_{i_z} = (i_z - 0,5)\Delta_z$  avec  $i_z = 1, 2, \dots, N_z$  et :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_z^{dz}(i_x, 1) \\ \mathbf{E}_z^{dz}(i_x, 2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{E}_z^{dz}(i_x, N_z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_z} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 1 \\ e^{-jk_{z0}L_z} & & & & & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_z(N_z \times N_z)} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_z(i_x, 1) \\ \mathbf{E}_z(i_x, 2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{E}_z(i_x, N_z) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Les expressions des équations (2.9) et (2.10), elles, sont employées pour approcher les opérateurs différentiels appliqués sur  $h_z$  par des différences finies centrées. La dérivée du champ  $\frac{\partial h_z}{\partial x}$  est approchée par  $\frac{\partial h_z}{\partial x}(x_{i_x}, z_{i_z}) \cong \mathbf{H}_z^{dx}(i_x, i_z)$  où  $x_{i_x} = (i_x - 1)\Delta_x$

avec  $i_x = 1, 2, \dots, N_x$ ,  $z_{i_x} = (i_x - 0,5)\Delta_z$  avec  $i_z = 1, 2, \dots, N_z$  et :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_z^{dx}(1, i_z) \\ \mathbf{H}_z^{dx}(2, i_z) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{H}_z^{dx}(N_x, i_z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_x} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & -e^{jk_{x0}L_x} \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{-\mathbf{D}_x^{t*}(N_x \times N_x)} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_z(1, i_z) \\ \mathbf{H}_z(2, i_z) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{H}_z(N_x, i_z) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

De même,  $\frac{\partial h_z}{\partial z}$  est approchée par  $\frac{\partial h_z}{\partial z}(x_{i_x}, z_{i_x}) \cong \mathbf{H}_z^{dz}(i_x, i_z)$  où  $x_{i_x} = (i_x - 0,5)\Delta_x$  avec  $i_x = 1, 2, \dots, N_x$ ,  $z_{i_x} = (i_x - 1)\Delta_z$  avec  $i_z = 1, 2, \dots, N_z$  et :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_z^{dz}(i_x, 1) \\ \mathbf{H}_z^{dz}(i_x, 2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{H}_z^{dz}(i_x, N_z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_z} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & -e^{jk_{z0}L_z} \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{-\mathbf{D}_z^{t*}(N_z \times N_z)} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_z(i_x, 1) \\ \mathbf{H}_z(i_x, 2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{H}_z(i_x, N_z) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Les expressions  $\mathbf{D}_x^{t*}$  et  $\mathbf{D}_z^{t*}$  désignent les transposées conjuguées de  $\mathbf{D}_x$  et  $\mathbf{D}_z$ . Les dérivées secondes des champs  $e_z$  et  $h_z$  sont approchées par des différences finies centrées des expressions obtenues plus haut pour les dérivées premières. La combinaison des deux différences finies centrées a pour conséquence que les dérivées secondes approchées sont évaluées exactement aux points d'échantillonnage des champs  $e_z$  et  $h_z$ . Les équations suivantes décrivent les dérivées secondes approchées pour la composante

$z$  du champ électrique :

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2}(x_1 \dots x_{N_x}, z_n) \cong -\frac{\mathbf{D}_x^{t*} \mathbf{E}_z^{dx}(1 \dots N_x, n)}{\Delta_x} = -\frac{\mathbf{P}_x^e \mathbf{E}_z(1 \dots N_x, n)}{\Delta_x^2} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial z^2}(x_m, z_1 \dots z_{N_z}) \cong -\frac{\mathbf{D}_z^{t*} \mathbf{E}_z^{dz}(m, 1 \dots N_z)}{\Delta_z} = -\frac{\mathbf{P}_z^e \mathbf{E}_z(m, 1 \dots N_z)}{\Delta_z^2} \quad (2.16)$$

où  $\mathbf{P}_x^e = \mathbf{D}_x^{t*} \mathbf{D}_x$ ,  $\mathbf{P}_z^e = \mathbf{D}_z^{t*} \mathbf{D}_z$ ,  $x_m = (m-1)\Delta_x$  et  $z_n = (n-1)\Delta_z$ . En ce qui a trait aux dérivées secondes approchées pour la composante  $z$  du champ magnétique, on a :

$$\frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2}(x_1 \dots x_{N_x}, z_q) \cong \frac{\mathbf{D}_x \mathbf{H}_z^{dx}(1 \dots N_x, q)}{\Delta_x} = -\frac{\mathbf{P}_x^h \mathbf{H}_z(1 \dots N_x, q)}{\Delta_x^2} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2 h_z}{\partial z^2}(x_p, z_1 \dots z_{N_z}) \cong \frac{\mathbf{D}_z \mathbf{H}_z^{dz}(p, 1 \dots N_z)}{\Delta_z} = -\frac{\mathbf{P}_z^h \mathbf{H}_z(p, 1 \dots N_z)}{\Delta_z^2} \quad (2.18)$$

où  $\mathbf{P}_x^h = \mathbf{D}_x \mathbf{D}_x^{t*}$ ,  $\mathbf{P}_z^h = \mathbf{D}_z \mathbf{D}_z^{t*}$ ,  $x_m = (m-0,5)\Delta_x$  et  $z_n = (n-0,5)\Delta_z$ . En remplaçant deux des trois opérateurs différentiels des équations de Helmholtz (2.1) et (2.2) par les dérivées secondes approchées des équations (2.15) à (2.18), on obtient :

$$\left( \frac{d}{d^2 y} - \frac{\hat{\mathbf{P}}_x^e}{\Delta_x^2} - \frac{\hat{\mathbf{P}}_z^e}{\Delta_z^2} + \epsilon_r k_0^2 \hat{\mathbf{I}} \right) \mathbf{E}_z^\ell = 0 \quad (2.19)$$

$$\left( \frac{d}{d^2 y} - \frac{\hat{\mathbf{P}}_x^h}{\Delta_x^2} - \frac{\hat{\mathbf{P}}_z^h}{\Delta_z^2} + \epsilon_r k_0^2 \hat{\mathbf{I}} \right) \mathbf{H}_z^\ell = 0 \quad (2.20)$$

où  $\mathbf{E}_z^\ell$  et  $\mathbf{H}_z^\ell$  sont des vecteurs de taille  $N_x N_z$  formés à partir des matrices  $\mathbf{E}_z$  et  $\mathbf{H}_z$  de taille  $N_x \times N_z$  déroulées de la façon suivante :

$$\mathbf{E}_z(m, n) = \mathbf{E}_z^\ell(m + (n-1)N_z) \quad (2.21)$$

$$\mathbf{H}_z(p, q) = \mathbf{H}_z^\ell(p + (q-1)N_z) \quad (2.22)$$

$\mathbf{E}_z$  et  $\mathbf{H}_z$  sont des quantités semi-analytiques : elles sont analytiques selon  $y$  et discrètes selon  $x$  et  $z$ . Ainsi, les opérateurs entre parenthèses des équations (2.19) et

(2.20) sont semi-analytiques, comportant un opérateur analytique  $\frac{d}{d^2y}$  et des opérateurs discrets formés de matrices. Les matrices  $\hat{\mathbf{P}}_x^{e,h}$  et  $\hat{\mathbf{P}}_z^{e,h}$  sont obtenues par  $\hat{\mathbf{P}}_x^{e,h} = \mathbf{I}_z \otimes \mathbf{P}_x^{e,h}$ ,  $\hat{\mathbf{P}}_z^{e,h} = \mathbf{P}_z^{e,h} \otimes \mathbf{I}_x$  et le symbole  $\otimes$  désigne le produit de Kronecker. Ce dernier est défini, pour deux matrices  $A_{M \times N}$  et  $B_{P \times Q}$ , comme une matrice de taille  $MP \times NQ$  obtenue par :

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1N}\mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1}\mathbf{B} & \dots & a_{MN}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Les matrices  $\hat{\mathbf{P}}_x^{e,h}$ ,  $\hat{\mathbf{P}}_z^{e,h}$  et  $\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{I}_x \otimes \mathbf{I}_z$  sont donc de taille  $N_x \times N_x$ .  $\mathbf{I}_x$  et  $\mathbf{I}_z$  sont des matrices identité de tailles  $N_x \times N_x$  et  $N_z \times N_z$ .

Nous avons discrétisé deux des trois opérateurs différentiels des équations aux dérivées partielles (2.1) et (2.2) pour obtenir les équations (2.19) et (2.20). Ces dernières sont composées de plusieurs équations aux dérivées ordinaires couplées entre elles par les matrices  $\hat{\mathbf{P}}_x^{e,h}$  et  $\hat{\mathbf{P}}_z^{e,h}$ . Dans la section suivante, nous chercherons à découpler ces équations de manière à pouvoir résoudre séparément chacune des équations différentielles.

### 2.3 Diagonalisation de l'équation de Helmholtz

Pour découpler les équations différentielles des équations (2.19) et (2.20), nous chercherons des matrices de transformation  $\hat{\mathbf{T}}_{e,h}$  telles que  $\hat{\mathbf{T}}_{e,h}^{-1} = \hat{\mathbf{T}}_{e,h}^{t*}$  qui diagonalisent les opérateurs  $\hat{\mathbf{P}}_x^e$  et  $\hat{\mathbf{P}}_z^e$  :

$$\left( \frac{d}{d^2y} - \Delta_x^{-2} \underbrace{\hat{\mathbf{T}}_e^{t*} \hat{\mathbf{P}}_x^e \hat{\mathbf{T}}_e}_{\hat{\lambda}_{ex}^2} - \Delta_z^{-2} \underbrace{\hat{\mathbf{T}}_e^{t*} \hat{\mathbf{P}}_z^e \hat{\mathbf{T}}_e}_{\hat{\lambda}_{ez}^2} + \epsilon_r k_0^2 \hat{\mathbf{I}} \right) \bar{\mathbf{E}}_z^t = 0 \quad (2.24)$$

$$\left( \frac{d}{d^2 y} - \Delta_x^{-2} \underbrace{\hat{\mathbf{T}}_h^{t*} \hat{\mathbf{P}}_x^{e,h} \hat{\mathbf{T}}_h}_{\hat{\lambda}_{hx}^2} - \Delta_z^{-2} \underbrace{\hat{\mathbf{T}}_h^{t*} \hat{\mathbf{P}}_z^{e,h} \hat{\mathbf{T}}_h}_{\hat{\lambda}_{hz}^2} + \epsilon_r k_0^2 \hat{\mathbf{I}} \right) \bar{\mathbf{H}}_z^\ell = 0 \quad (2.25)$$

où  $\hat{\lambda}_{(e,h)x}^2$  et  $\hat{\lambda}_{(e,h)z}^2$  sont des matrices diagonales de taille  $N_x N_z$  contenant les valeurs propres des matrices  $\hat{\mathbf{P}}_x^{e,h}$  et  $\hat{\mathbf{P}}_z^{e,h}$  et les vecteurs  $\bar{\mathbf{E}}_z^\ell$  et  $\bar{\mathbf{H}}_z^\ell$  sont les vecteurs de champ transformé définis comme suit :  $\mathbf{E}_z^\ell = \hat{\mathbf{T}}_e \bar{\mathbf{E}}_z^\ell$  et  $\mathbf{H}_z^\ell = \hat{\mathbf{T}}_h \bar{\mathbf{H}}_z^\ell$ . Puisque  $\hat{\mathbf{P}}_x^{e,h} = \mathbf{I}_z \otimes \mathbf{P}_x^{e,h}$  et  $\hat{\mathbf{P}}_z^{e,h} = \mathbf{P}_z^{e,h} \otimes \mathbf{I}_x$ , il est aisé d'obtenir les transformations  $\hat{\mathbf{T}}_{e,h}$  qui diagonalisent  $\hat{\mathbf{P}}_x^{e,h}$  et  $\hat{\mathbf{P}}_z^{e,h}$  à partir des transformations  $\mathbf{T}_{(e,h)x}$  et  $\mathbf{T}_{(e,h)z}$  qui diagonalisent  $\mathbf{P}_x^{e,h}$  et  $\mathbf{P}_z^{e,h}$ . Supposons que  $\hat{\mathbf{T}}_{e,h}$  peut être obtenue par le produit de Kronecker :  $\hat{\mathbf{T}}_{e,h} = \mathbf{T}_{(e,h)z} \otimes \mathbf{T}_{(e,h)x}$ . Nous disposons des deux propriétés suivantes du produit de Kronecker :

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD}) \quad (2.26)$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{t*} = \mathbf{A}^{t*} \otimes \mathbf{B}^{t*} \quad (2.27)$$

En utilisant ces propriétés, on peut déduire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}_{e,h}^{t*} \hat{\mathbf{P}}_x^{e,h} \hat{\mathbf{T}}_{e,h} &= (\mathbf{T}_{(e,h)z}^{t*} \otimes \mathbf{T}_{(e,h)x}^{t*}) (\mathbf{I}_z \otimes \mathbf{P}_x^{e,h}) (\mathbf{T}_{(e,h)z} \otimes \mathbf{T}_{(e,h)x}) \\ &= \mathbf{I}_z \otimes \underbrace{\mathbf{T}_{(e,h)x}^{t*} \mathbf{P}_x^{e,h} \mathbf{T}_{(e,h)x}}_{\lambda_{(e,h)x}^2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}_{e,h}^{t*} \hat{\mathbf{P}}_z^{e,h} \hat{\mathbf{T}}_{e,h} &= (\mathbf{T}_{(e,h)z}^{t*} \otimes \mathbf{T}_{(e,h)x}^{t*}) (\mathbf{P}_z^{e,h} \otimes \mathbf{I}_x) (\mathbf{T}_{(e,h)z} \otimes \mathbf{T}_{(e,h)x}) \\ &= \underbrace{\mathbf{T}_{(e,h)z}^{t*} \mathbf{P}_z^{e,h} \mathbf{T}_{(e,h)z}}_{\lambda_{(e,h)z}^2} \otimes \mathbf{I}_x \end{aligned} \quad (2.29)$$

On constate donc que, pour que  $\hat{\mathbf{T}}_{e,h}^{t*} \hat{\mathbf{P}}_x^{e,h} \hat{\mathbf{T}}_{e,h}$  et  $\hat{\mathbf{T}}_{e,h}^{t*} \hat{\mathbf{P}}_z^{e,h} \hat{\mathbf{T}}_{e,h}$  soient diagonales, il faut que  $\mathbf{T}_{(e,h)x}^{t*} \mathbf{P}_x^{e,h} \mathbf{T}_{(e,h)x}$  et  $\mathbf{T}_{(e,h)z}^{t*} \mathbf{P}_z^{e,h} \mathbf{T}_{(e,h)z}$  le soient aussi. Les symboles  $\lambda_{(e,h)x}^2$  et  $\lambda_{(e,h)z}^2$  représentent les valeurs propres des matrices  $\mathbf{P}_x^{e,h}$  et  $\mathbf{P}_z^{e,h}$ .

La diagonalisation des matrices  $\mathbf{P}_x^{e,h}$  et  $\mathbf{P}_z^{e,h}$  est facilitée par la normalisation des champs par rapport à la phase correspondant au déphasage entre les excitations des cellules adjacentes, tel que proposé dans [19] :

$$e_{zn} = e^{j(k_{x0}x + k_{z0}z)} e_z \quad h_{zn} = e^{j(k_{x0}x + k_{z0}z)} h_z \quad (2.30)$$

Les champs normalisés  $e_{zn}$  et  $h_{zn}$  sont ainsi proprement périodiques, tandis que les champs originaux  $e_z$  et  $h_z$  étaient périodiques à *une phase près*. Les champs normalisés sont échantillonnés de la même manière qu'aux équations (2.5) et (2.6), de sorte que l'on peut écrire les relations suivantes :

$$\mathbf{E}_{zn} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ N_x \end{bmatrix}, i_z \right) = \mathbf{S}_{xe} \mathbf{E}_z \left( \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ N_x \end{bmatrix}, i_z \right) \quad \begin{array}{l} \text{où } \mathbf{S}_{xe} = \text{diag} (e^{jk_{x0}(i_z-1)\Delta_x}) \\ \text{avec } i_z = 1, 2, \dots, N_z \end{array} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{E}_{zn} \left( i_x, \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ N_z \end{bmatrix} \right) = \mathbf{E}_z \left( i_x, \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ N_z \end{bmatrix} \right) \mathbf{S}_{ze} \quad \begin{array}{l} \text{où } \mathbf{S}_{ze} = \text{diag} (e^{jk_{z0}(i_z-1)\Delta_z}) \\ \text{avec } i_z = 1, 2, \dots, N_z \end{array} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{H}_{zn} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ N_x \end{bmatrix}, i_z \right) = \mathbf{S}_{xh} \mathbf{H}_z \left( \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ N_x \end{bmatrix}, i_z \right) \quad \begin{array}{l} \text{où } \mathbf{S}_{xh} = \text{diag} (e^{jk_{x0}(i_z-0.5)\Delta_x}) \\ \text{avec } i_z = 1, 2, \dots, N_z \end{array} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{H}_{zn} \left( i_x, \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ N_z \end{bmatrix} \right) = \mathbf{H}_z \left( i_x, \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ N_z \end{bmatrix} \right) \mathbf{S}_{zh} \quad \begin{array}{l} \text{où } \mathbf{S}_{zh} = \text{diag} (e^{jk_{z0}(i_z-0.5)\Delta_z}) \\ \text{avec } i_z = 1, 2, \dots, N_z \end{array} \quad (2.34)$$



Les matrices  $\mathbf{S}$  sont des matrices diagonales. En utilisant les matrices de normalisation, on peut définir des opérateurs  $\mathbf{P}_{xn}^{e,h}$  et  $\mathbf{P}_{zn}^{e,h}$  et de nouvelles transformées  $\mathbf{T}_{(e,h)xn}$  et  $\mathbf{T}_{(e,h)zn}$  normalisés en conservant les mêmes valeurs propres :

$$\lambda_{(e,h)x}^2 = \mathbf{T}_{(e,h)x}^{t*} \mathbf{P}_x^{e,h} \mathbf{T}_{(e,h)x} = \underbrace{\mathbf{T}_{(e,h)x}^{t*} \mathbf{S}_{(e,h)x}^*}_{\mathbf{T}_{(e,h)xn}^{t*}} \underbrace{\mathbf{S}_{(e,h)x} \mathbf{P}_x^{e,h} \mathbf{S}_{(e,h)x}^*}_{\mathbf{P}_{xn}^{e,h}} \underbrace{\mathbf{S}_{(e,h)x} \mathbf{T}_{(e,h)x}}_{\mathbf{T}_{(e,h)zn}} \quad (2.35)$$

$$\lambda_{(e,h)z}^2 = \mathbf{T}_{(e,h)z}^{t*} \mathbf{P}_z^{e,h} \mathbf{T}_{(e,h)z} = \underbrace{\mathbf{T}_{(e,h)z}^{t*} \mathbf{S}_{(e,h)z}^*}_{\mathbf{T}_{(e,h)zn}^{t*}} \underbrace{\mathbf{S}_{(e,h)z} \mathbf{P}_z^{e,h} \mathbf{S}_{(e,h)z}^*}_{\mathbf{P}_{zn}^{e,h}} \underbrace{\mathbf{S}_{(e,h)z} \mathbf{T}_{(e,h)z}}_{\mathbf{T}_{(e,h)xn}} \quad (2.36)$$

Si on réécrit les matrices  $\mathbf{P}_{xn}^{e,h}$  en fonction de nouvelles matrices de différences finies normalisées  $\mathbf{D}_{xn}$  et  $\mathbf{D}_{zn}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(x,z)n}^e &= \mathbf{S}_{e(x,z)} \mathbf{P}_{x,z}^e \mathbf{S}_{e(x,z)}^* = \mathbf{S}_{e(x,z)} \mathbf{D}_{x,z}^{t*} \mathbf{D}_{x,z} \mathbf{S}_{e(x,z)}^* \\ &= \underbrace{\mathbf{S}_{e(x,z)} \mathbf{D}_{x,z}^{t*} \mathbf{S}_{h(x,z)}^*}_{\mathbf{D}_{(x,z)n}^{t*}} \underbrace{\mathbf{S}_{h(x,z)} \mathbf{D}_{x,z} \mathbf{S}_{e(x,z)}^*}_{\mathbf{D}_{(x,z)n}} = \mathbf{D}_{(x,z)n}^{t*} \mathbf{D}_{(x,z)n} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(x,z)n}^h &= \mathbf{S}_{h(x,z)} \mathbf{P}_{x,z}^h \mathbf{S}_{h(x,z)}^* = \mathbf{S}_{h(x,z)} \mathbf{D}_{x,z} \mathbf{D}_{x,z}^{t*} \mathbf{S}_{h(x,z)}^* \\ &= \underbrace{\mathbf{S}_{h(x,z)} \mathbf{D}_{x,z} \mathbf{S}_{e(x,z)}^*}_{\mathbf{D}_{(x,z)n}} \underbrace{\mathbf{S}_{e(x,z)} \mathbf{D}_{x,z}^{t*} \mathbf{S}_{h(x,z)}^*}_{\mathbf{D}_{(x,z)n}^{t*}} = \mathbf{D}_{(x,z)n} \mathbf{D}_{(x,z)n}^{t*} \end{aligned} \quad (2.38)$$

À partir des expressions de  $\mathbf{D}_x$  et  $\mathbf{D}_z$  données aux équations (2.11) et (2.12) et de celles données aux équations (2.31) à (2.34) pour les matrices  $\mathbf{S}$  de normalisation,

on obtient l'expression suivante pour les matrices  $\mathbf{D}_{xn}$  et  $\mathbf{D}_{zn}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{(x,z)n} &= \mathbf{S}_{h(x,z)} \mathbf{D}_{x,z} \mathbf{S}_{e(x,z)}^* \\ &= \begin{bmatrix} -s_{x,z} & s_{x,z}^* & & & \\ & -s_{x,z} & s_{x,z}^* & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & s_{x,z}^* \\ s_{x,z}^* & & & & -s_{x,z} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} s_x &= e^{jk_{x0}\Delta_x/2} \\ \text{et } s_z &= e^{jk_{z0}\Delta_z/2} \end{aligned} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Pour cette matrice  $\mathbf{D}_{(x,z)n}$ , on a :  $\mathbf{P}_{(x,z)n} = \mathbf{D}_{(x,z)n} \mathbf{D}_{(x,z)n}^{t*} = \mathbf{D}_{(x,z)n}^{t*} \mathbf{D}_{(x,z)n}$ . Alors on peut dire que  $\mathbf{P}_{(x,z)n}^e = \mathbf{P}_{(x,z)n}^h = \mathbf{P}_{(x,z)n}$ . Puisque les valeurs propres d'un produit de deux matrices peuvent être calculées par le produit des valeurs propres des matrices, alors les valeurs propres  $\lambda_{x,z}^2$  de la matrice  $\mathbf{P}_{(x,z)n}$  peuvent être calculées à partir du produit des valeurs propres des matrices  $\mathbf{D}_{(x,z)n}$  et  $\mathbf{D}_{(x,z)n}^{t*}$  :

$$\lambda_{x,z}^2 = \mathbf{v}_{x,z} \mathbf{v}_{x,z}^*$$

où  $\mathbf{v}_{x,z}$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{D}_{(x,z)n}$ . Ces dernières, dérivées à l'annexe I, s'expriment :

$$v_x^i = 2j e^{j\pi(i-1)/N_x} \sin \left( \frac{\pi(i-1)}{N_x} - \frac{k_{x0}\Delta_x}{2} \right) \quad (2.40)$$

$$v_z^i = 2j e^{j\pi(i-1)/N_z} \sin \left( \frac{\pi(i-1)}{N_z} - \frac{k_{z0}\Delta_z}{2} \right) \quad (2.41)$$

Les matrices de transformation  $\mathbf{T}_{(x,z)en}$  et  $\mathbf{T}_{(x,z)hn}$  choisies à l'annexe I diagonalisent

toutes deux la matrice  $\mathbf{D}_{(x,z)n}$ . Elles sont données par :

$$T_{zen}^{ik} = \frac{1}{\sqrt{N_x}} e^{j2\pi(i-1)(k-1)/N_x} \quad T_{zhn}^{ik} = \frac{1}{\sqrt{N_x}} e^{j2\pi(i-\frac{1}{2})(k-1)/N_x} \quad (2.42)$$

avec  $i = 1, 2, \dots, N_x$  et  $k = 1, 2, \dots, N_x$

$$T_{zen}^{ik} = \frac{1}{\sqrt{N_z}} e^{j2\pi(i-1)(k-1)/N_z} \quad T_{zhn}^{ik} = \frac{1}{\sqrt{N_z}} e^{j2\pi(i-\frac{1}{2})(k-1)/N_z} \quad (2.43)$$

avec  $i = 1, 2, \dots, N_z$  et  $k = 1, 2, \dots, N_z$

Ces matrices diagonalisent aussi  $\mathbf{P}_{(x,z)n}$  comme on peut le voir ici :

$$\mathbf{T}_{(x,z)en}^{t*} \mathbf{P}_{(x,z)n} \mathbf{T}_{(x,z)en} = \underbrace{\mathbf{T}_{(x,z)en}^{t*} \mathbf{D}_{(x,z)n}^{t*}}_{\mathbf{v}_{x,z}^*} \underbrace{\mathbf{T}_{(x,z)en}^{t*} \mathbf{D}_{(x,z)n}}_{\mathbf{v}_{x,z}} \mathbf{T}_{(x,z)en} = \lambda_{x,z}^2 \quad (2.44)$$

$$\mathbf{T}_{(x,z)hn}^{t*} \mathbf{P}_{(x,z)n} \mathbf{T}_{(x,z)hn} = \underbrace{\mathbf{T}_{(x,z)hn}^{t*} \mathbf{D}_{(x,z)n}^{t*}}_{\mathbf{v}_{x,z}^*} \underbrace{\mathbf{T}_{(x,z)hn}^{t*} \mathbf{D}_{(x,z)n}}_{\mathbf{v}_{x,z}} \mathbf{T}_{(x,z)hn} = \lambda_{x,z}^2 \quad (2.45)$$

Les valeurs propres de  $\mathbf{P}_{(x,z)n}$  sont donc données par :

$$\lambda_{(x,z)i}^2 = 4 \left[ \sin \left( \frac{\pi(i-1)}{N_{x,z}} - \frac{k_{x0,z0} \Delta_{x,z}}{2} \right) \right]^2 \quad (2.46)$$

avec  $m = 1, 2, \dots, N_x N_z$ . Une autre quantité s'avérera utile pour la suite de ce chapitre :

$$\delta_{x,z} = \mathbf{T}_{(x,z)h}^{t*} \mathbf{D}_{x,z} \mathbf{T}_{(x,z)e} = \mathbf{T}_{(x,z)hn}^{t*} \mathbf{D}_{(x,z)n} \mathbf{T}_{(x,z)en} = j \lambda_{x,z} \quad (2.47)$$

où  $\lambda_{x,z}$  est obtenue par la racine positive de l'expression donnée en (2.46).

Comme nous l'avons vu aux équations (2.28) et (2.29), nous pouvons obtenir les

expressions de  $\hat{\lambda}_{(e,h)x}^2$  et  $\hat{\lambda}_{(e,h)z}^2$  à l'aide du produit de Kronecker :

$$\hat{\lambda}_{ex}^2 = \hat{\lambda}_{hx}^2 = \hat{\lambda}_x^2 = \mathbf{I}_z \otimes \lambda_x^2 \quad (2.48)$$

$$\hat{\lambda}_{ez}^2 = \hat{\lambda}_{hz}^2 = \hat{\lambda}_z^2 = \lambda_z^2 \otimes \mathbf{I}_x \quad (2.49)$$

où  $\mathbf{I}_x$  et  $\mathbf{I}_z$  sont des matrices identité de taille  $N_x \times N_x$  et  $N_z \times N_z$ , respectivement.

Les équations de Helmholtz pour  $\bar{\mathbf{E}}_z^\ell$  et  $\bar{\mathbf{H}}_z^\ell$  sont maintenant diagonalisées, de sorte que nous avons, dans le domaine transformé, un ensemble de  $N_x \times N_z$  équations différentielles ordinaires découplées à résoudre :

$$\left( \frac{d}{d^2y} - \mathbf{k}_y^2 \right) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_z^\ell \\ \bar{\mathbf{H}}_z^\ell \end{bmatrix} = 0 \quad (2.50)$$

$$\mathbf{k}_y^2 = \left( \frac{\hat{\lambda}_x}{\Delta_x} \right)^2 + \left( \frac{\hat{\lambda}_z}{\Delta_z} \right)^2 - \epsilon_r k_0^2 \hat{\mathbf{I}} \quad (2.51)$$

La forme des solutions possibles dans la direction  $y$  pour les champs transformés dépend des racines choisies pour  $\mathbf{k}_y^2$ , et par conséquent du milieu dans lequel on se trouve, que ce soit dans une couche diélectrique ou dans une des couches absorbantes au-dessus ou en dessous de l'antenne. Nous verrons ces deux milieux aux sections 2.5 et 2.6.

Dans la section suivante, nous nous attarderons à obtenir des expressions liant les champs  $\mathbf{E}_x$  et  $\mathbf{H}_x$  aux champs  $\mathbf{E}_z$  et  $\mathbf{H}_z$ . Ces expressions nous seront utiles pour développer les paramètres hybrides d'une couche diélectrique (section 2.5) et d'une couche absorbante (section 2.6).

## 2.4 Calcul des champs discrétisés $\mathbf{E}_x$ et $\mathbf{H}_x$ à partir de $\mathbf{E}_z$ et $\mathbf{H}_z$

Dans cette section, nous allons développer les relations existant entre les composantes  $x$  et les composantes  $z$  des champs électromagnétiques transformés.

Les équations de Maxwell en dehors des points de source s'écrivent :

$$\nabla \times \vec{e} = -j\omega\mu\vec{h} \quad (2.52)$$

$$\nabla \times \vec{h} = j\omega\epsilon\vec{e} \quad (2.53)$$

Si on extrait la composante  $y$  de l'équation (2.52) et la composante  $x$  de l'équation (2.53), on obtient :

$$\frac{\partial e_x}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial x} = -j\omega\mu h_y \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} = j\omega\epsilon e_x \quad (2.55)$$

Dérivons par rapport à  $z$  l'équation (2.54) :

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 e_z}{\partial x \partial z} = -j\omega\mu \frac{\partial h_y}{\partial z} \quad (2.56)$$

En combinant (2.56) et (2.55), on obtient :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon \right) e_x = \frac{\partial^2 e_z}{\partial x \partial z} - j\omega\mu \frac{\partial h_z}{\partial y} \quad (2.57)$$

ou

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \epsilon_r k_0^2 \right) e_x = \frac{\partial^2 e_z}{\partial x \partial z} - jk_0 \eta_0 \frac{\partial h_z}{\partial y} \quad (2.58)$$

La seconde équation est valide car  $\mu = \mu_0$ , la perméabilité du vide. Le symbole  $\eta_0$  représente l'impédance caractéristique du vide.

Par la même approche, si on extrait la composante  $y$  de (2.53) et la composante  $x$  de (2.52), on a :

$$\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} = j\omega\epsilon e_y \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial e_z}{\partial y} - \frac{\partial e_y}{\partial z} = -j\omega\mu h_x \quad (2.60)$$

En dérivant par rapport à  $z$  l'équation (2.59), on obtient :

$$\frac{\partial^2 h_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 h_z}{\partial x \partial z} = j\omega\epsilon \frac{\partial e_y}{\partial z} \quad (2.61)$$

La combinaison de (2.61) et (2.59) résulte en :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \epsilon \right) h_x = \frac{\partial^2 h_z}{\partial x \partial z} + j\omega\epsilon \frac{\partial e_z}{\partial y} \quad (2.62)$$

ou

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \epsilon_r k_0^2 \right) h_x = \frac{\partial^2 h_z}{\partial x \partial z} + j\epsilon_r \frac{k_0}{\eta_0} \frac{\partial e_z}{\partial y} \quad (2.63)$$

Si on discrétise les équations (2.58) et (2.63) au moyen des opérateurs de différences finies décrits plus haut, on obtient les relations suivantes entre les vecteurs discrétisés des composantes  $x$  et  $z$  des champs électromagnétiques [19] :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \left( -\Delta_z^{-2} \hat{\mathbf{P}}_{zh} + \epsilon_r k_0^2 \hat{\mathbf{I}} \right) \mathbf{E}_x' \\ \left( -\Delta_z^{-2} \hat{\mathbf{P}}_{ze} + \epsilon_r k_0^2 \hat{\mathbf{I}} \right) \eta_0 \mathbf{H}_z' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Delta_x^{-1} \hat{\mathbf{D}}_x \Delta_z^{-1} \hat{\mathbf{D}}_z & -jk_0 \hat{\mathbf{I}} \frac{\partial}{\partial y} \\ jk_0 \epsilon_r \hat{\mathbf{I}} \frac{\partial}{\partial y} & \Delta_x^{-1} \hat{\mathbf{D}}_x^* \Delta_z^{-1} \hat{\mathbf{D}}_z^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_z' \\ \eta_0 \mathbf{H}_z' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.64)$$

où les vecteurs  $\mathbf{E}_x'$ ,  $\mathbf{H}_x'$ ,  $\mathbf{E}_z'$  et  $\mathbf{H}_z'$  sont des vecteurs de taille  $N_x N_z$  formés à partir des matrices *déroulées*  $\mathbf{E}_x$ ,  $\mathbf{H}_x$ ,  $\mathbf{E}_z$  et  $\mathbf{H}_z$  de la façon décrite aux équations (2.21) et (2.22). Nous passerons maintenant dans le domaine transformé, en employant la normalisation des champs par rapport à la phase, telle que définie aux équations (2.31) à (2.34). Soit les substitutions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x' &= \hat{\mathbf{S}}_h^* \hat{\mathbf{T}}_{hn} \bar{\mathbf{E}}_x' & \mathbf{H}_x' &= \hat{\mathbf{S}}_e^* \hat{\mathbf{T}}_{en} \bar{\mathbf{H}}_x' \\ \mathbf{E}_z' &= \hat{\mathbf{S}}_e^* \hat{\mathbf{T}}_{en} \bar{\mathbf{E}}_z' & \mathbf{H}_z' &= \hat{\mathbf{S}}_h^* \hat{\mathbf{T}}_{hn} \bar{\mathbf{H}}_z' \end{aligned} \quad (2.65)$$

où :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{S}}_h &= \mathbf{S}_{hz} \otimes \mathbf{S}_{hz} & \hat{\mathbf{S}}_e &= \mathbf{S}_{ez} \otimes \mathbf{S}_{ez} \\ \hat{\mathbf{T}}_{hn} &= \mathbf{T}_{hzn} \otimes \mathbf{T}_{hzn} & \hat{\mathbf{T}}_{en} &= \mathbf{T}_{ezn} \otimes \mathbf{T}_{ezn}\end{aligned}\quad (2.66)$$

En effectuant ces substitutions dans l'équation (2.64) et en multipliant le système par  $\frac{1}{k_0^2} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{T}}_{hn}^{t*} \hat{\mathbf{S}}_h & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{T}}_{en}^{t*} \hat{\mathbf{S}}_e \end{bmatrix}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} \left( \epsilon_r \hat{\mathbf{I}} - (k_0 \Delta_z)^{-2} \hat{\mathbf{T}}_{hn}^{t*} \hat{\mathbf{S}}_h \hat{\mathbf{P}}_{zh} \hat{\mathbf{S}}_h^* \hat{\mathbf{T}}_{hn} \right) \overline{\mathbf{E}}_z^\ell \\ \left( \epsilon_r \hat{\mathbf{I}} - (k_0 \Delta_z)^{-2} \hat{\mathbf{T}}_{en}^{t*} \hat{\mathbf{S}}_e \hat{\mathbf{P}}_{ze} \hat{\mathbf{S}}_e^* \hat{\mathbf{T}}_{en} \right) \eta_0 \overline{\mathbf{H}}_x^\ell \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\hat{\mathbf{T}}_{hn}^{t*} \hat{\mathbf{S}}_h \hat{\mathbf{D}}_x \hat{\mathbf{D}}_z \hat{\mathbf{S}}_e^* \hat{\mathbf{T}}_{en}}{k_0^2 \Delta_x \Delta_z} & -j \frac{1}{k_0} \hat{\mathbf{I}} \frac{\partial}{\partial y} \\ j \frac{\epsilon_r}{k_0} \hat{\mathbf{I}} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\hat{\mathbf{T}}_{en}^{t*} \hat{\mathbf{S}}_e \hat{\mathbf{D}}_x \hat{\mathbf{D}}_z \hat{\mathbf{S}}_h^* \hat{\mathbf{T}}_{hn}}{k_0^2 \Delta_x \Delta_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{E}}_z^\ell \\ \eta_0 \overline{\mathbf{H}}_x^\ell \end{bmatrix} \quad (2.67)\end{aligned}$$

Pour simplifier (2.67), utilisons les propriétés du produit de Kronecker (équations (2.26) et (2.27)) :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{T}}_{hn}^{t*} \hat{\mathbf{S}}_h \hat{\mathbf{P}}_{zh} \hat{\mathbf{S}}_h^* \hat{\mathbf{T}}_{hn} &= (\mathbf{T}_{zhn}^{t*} \otimes \mathbf{T}_{zhn}^{t*}) (\mathbf{S}_{zh} \otimes \mathbf{S}_{zh}) (\mathbf{P}_{zh} \otimes \mathbf{I}_x) (\mathbf{S}_{zh}^* \otimes \mathbf{S}_{zh}^*) (\mathbf{T}_{zhn} \otimes \mathbf{T}_{zhn}) \\ &= (\mathbf{T}_{zhn}^{t*} \mathbf{S}_{zh} \mathbf{P}_{zh} \mathbf{S}_{zh}^* \mathbf{T}_{zhn}) \otimes (\mathbf{T}_{zhn}^{t*} \mathbf{S}_{zh} \mathbf{S}_{zh}^* \mathbf{T}_{zhn}) \\ &= (\mathbf{T}_{zhn}^{t*} \mathbf{P}_{zh} \mathbf{T}_{znh}) \otimes \mathbf{I}_x = \lambda_z^2 \otimes \mathbf{I}_x = \hat{\lambda}_z^2\end{aligned}\quad (2.68)$$

De même, on a :

$$\hat{\mathbf{T}}_{en}^{t*} \hat{\mathbf{S}}_e \hat{\mathbf{P}}_{ze} \hat{\mathbf{S}}_e^* \hat{\mathbf{T}}_{en} = \hat{\lambda}_z^2 \quad (2.69)$$

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned}
 & \hat{\mathbf{T}}_{hn}^{t*} \hat{\mathbf{S}}_h \hat{\mathbf{D}}_x \hat{\mathbf{D}}_z \hat{\mathbf{S}}_e^* \hat{\mathbf{T}}_{en} \\
 &= (\mathbf{T}_{zhn}^{t*} \otimes \mathbf{T}_{zhn}^{t*}) (\mathbf{S}_{zh} \otimes \mathbf{S}_{zh}) (\mathbf{I}_z \otimes \mathbf{D}_x) (\mathbf{D}_z \otimes \mathbf{I}_x) (\mathbf{S}_{ze}^* \otimes \mathbf{S}_{ze}^*) (\mathbf{T}_{zen} \otimes \mathbf{T}_{zen}) \\
 &= (\mathbf{T}_{zhn}^{t*} \mathbf{S}_{zh} \mathbf{D}_z \mathbf{S}_{ze}^* \mathbf{T}_{zen}) \otimes (\mathbf{T}_{zhn}^{t*} \mathbf{S}_{zh} \mathbf{D}_x \mathbf{S}_{ze}^* \mathbf{T}_{zen}) \\
 &= (\mathbf{T}_{zhn}^{t*} \mathbf{D}_{zn} \mathbf{T}_{zen}) \otimes (\mathbf{T}_{zhn}^{t*} \mathbf{D}_{xn} \mathbf{T}_{zen}) = \mathbf{v}_z \otimes \mathbf{v}_x = (\boldsymbol{\delta}_z \otimes \mathbf{I}_x) (\mathbf{I}_z \otimes \boldsymbol{\delta}_x) \\
 &= \hat{\boldsymbol{\delta}}_x \hat{\boldsymbol{\delta}}_z
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

où nous avons défini  $\hat{\boldsymbol{\delta}}_x = \mathbf{I}_z \otimes \boldsymbol{\delta}_x$  et  $\hat{\boldsymbol{\delta}}_z = \boldsymbol{\delta}_z \otimes \mathbf{I}_x$ . De la même façon :

$$\hat{\mathbf{T}}_{en}^{t*} \hat{\mathbf{S}}_e \hat{\mathbf{D}}_z^* \hat{\mathbf{D}}_x^* \hat{\mathbf{S}}_h^* \hat{\mathbf{T}}_{hn} = \hat{\boldsymbol{\delta}}_x^* \hat{\boldsymbol{\delta}}_z^* \tag{2.71}$$

Définissons  $\hat{\lambda}_z^2 = \frac{\hat{\lambda}_z^2}{k_0^2 \Delta_z^2}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\delta}}_x = \frac{\hat{\boldsymbol{\delta}}_x}{k_0 \Delta_x}$  et  $\hat{\boldsymbol{\delta}}_z = \frac{\hat{\boldsymbol{\delta}}_z}{k_0 \Delta_z}$ . En utilisant ces définitions et les identités (2.68) à (2.71) et on peut réécrire l'équation (2.67) :

$$\begin{bmatrix} \left( \epsilon_r \hat{\mathbf{I}} - \hat{\lambda}_z^2 \right) \overline{\mathbf{E}}_x^\ell \\ \left( \epsilon_r \hat{\mathbf{I}} - \hat{\lambda}_z^2 \right) \eta_0 \overline{\mathbf{H}}_x^\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\delta}}_x \hat{\boldsymbol{\delta}}_z & -j \frac{1}{k_0} \hat{\mathbf{I}} \frac{\partial}{\partial y} \\ j \frac{\epsilon_r}{k_0} \hat{\mathbf{I}} \frac{\partial}{\partial y} & \hat{\boldsymbol{\delta}}_x^* \hat{\boldsymbol{\delta}}_z^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{E}}_z^\ell \\ \eta_0 \overline{\mathbf{H}}_z^\ell \end{bmatrix} \tag{2.72}$$

Avec l'équation (2.72), nous disposons d'une relation entre les composantes  $x$  et  $z$  des champs transformés. En précisant la forme des champs transformés, qui dépend de la nature du milieu dans lequel on se trouve (couche diélectrique ou couche absorbante), nous serons en mesure d'écrire l'opérateur différentiel  $\frac{\partial}{\partial y}$  sous une forme calculable. Nous pourrions ainsi caractériser les milieux par les relations entre les champs tangentiels (composantes  $x$  et  $z$ ) aux interfaces, sous forme de paramètres hybrides. Les deux prochaines sections sont consacrés à ces développements.



## 2.5 Paramètres hybrides d'une couche diélectrique

Dans cette section, nous développerons une expression reliant les champs électromagnétiques de part et d'autre d'une couche diélectrique homogène, suivant la notation de [19]. La solution de l'équation de Helmholtz (2.50) dans une couche diélectrique est la solution générale, puisqu'on n'impose aucune condition frontière. Les composantes des champs électrique et magnétique transformés ont pour solution générale une superposition de deux ondes voyageant dans la direction  $+y$  et  $-y$ , ce qui peut s'écrire :

$$\overline{E}_{zi}^{\ell} = A_i \cosh(k_{yi}y) + B_i \sinh(k_{yi}y) \quad (2.73)$$

$$\overline{H}_{zi}^{\ell} = C_i \cosh(k_{yi}y) + D_i \sinh(k_{yi}y) \quad (2.74)$$

avec  $\Re(k_{yi}) > 0$  et  $\Im(k_{yi}) > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_x N_z$

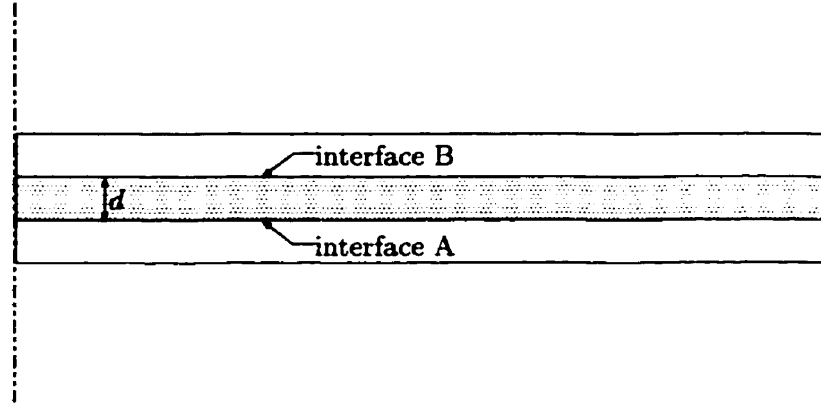
où  $k_{yi}$  est calculé à partir de la racine positive de l'équation (2.51) pour chacune des couches diélectrique, en prenant pour  $\epsilon_r$  la valeur de la permittivité relative dans chacune des couches diélectriques.

### 2.5.1 Expression de la dérivée du champ en fonction des valeurs des champs tangentiels aux interfaces

Afin d'être en mesure d'utiliser l'équation (2.72), nous cherchons à exprimer l'application de l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial y}$  sur  $\overline{E}_z^{\ell}$  et  $\overline{H}_z^{\ell}$  à l'une ou l'autre des interfaces A et B (voir figure 2.2) en fonction des champs eux-mêmes aux deux interfaces. Nous dériverons cette relation pour le champ électrique, puis nous généraliserons pour le champ magnétique.

Prenons la dérivée de (2.73) :

$$\frac{\partial \overline{E}_{zi}^{\ell}}{\partial y} = A_i k_{yi} \sinh(k_{yi}y) + B_i k_{yi} \cosh(k_{yi}y) \quad (2.75)$$



**Figure 2.2:** Interfaces de part et d'autre d'une couche diélectrique

En combinant (2.73) et (2.75), on peut exprimer  $A_i$  et  $B_i$  en termes des champs et de leurs dérivées à l'interface  $A$  :

$$\begin{bmatrix} A_i \\ B_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(k_{yi}y_A) & -\frac{1}{k_{yi}} \sinh(k_{yi}y_A) \\ -\sinh(k_{yi}y_A) & \frac{1}{k_{yi}} \cosh(k_{yi}y_A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{E}_{zi}^{\ell}(y_A) \\ \frac{\partial \overline{E}_{zi}^{\ell}}{\partial y}(y_A) \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Si on évalue (2.73) et (2.75) en  $y = y_B$  en remplaçant les coefficients  $A_i$  et  $B_i$  par les expressions données par (2.76), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \overline{E}_{zi}^{\ell}(y_B) \\ \frac{\partial \overline{E}_{zi}^{\ell}}{\partial y}(y_B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(k_{yi}d) & \frac{1}{k_{yi}} \sinh(k_{yi}d) \\ k_{yi} \sinh(k_{yi}d) & \cosh(k_{yi}d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{E}_{zi}^{\ell}(y_A) \\ \frac{\partial \overline{E}_{zi}^{\ell}}{\partial y}(y_A) \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

où  $d = y_B - y_A$ . Finalement, de simples manipulations algébriques permettent de réarranger l'équation précédente sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \overline{\mathbf{E}}_z^{\ell}}{\partial y}(y_A) \\ \frac{\partial \overline{\mathbf{E}}_z^{\ell}}{\partial y}(y_B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_y \coth(\mathbf{k}_y d) & \mathbf{k}_y \operatorname{csch}(\mathbf{k}_y d) \\ -\mathbf{k}_y \operatorname{csch}(\mathbf{k}_y d) & \mathbf{k}_y \coth(\mathbf{k}_y d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{E}}_z^{\ell}(y_A) \\ \overline{\mathbf{E}}_z^{\ell}(y_B) \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

où  $\mathbf{k}_y$  est une matrice diagonale de taille  $N_x N_z \times N_x N_z$ . Le même raisonnement

s'applique pour le champ magnétique, de sorte que :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \overline{\mathbf{H}}_z^\ell}{\partial y}(y_A) \\ \frac{\partial \overline{\mathbf{H}}_z^\ell}{\partial y}(y_B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_y \coth(\mathbf{k}_y d) & \mathbf{k}_y \operatorname{csch}(\mathbf{k}_y d) \\ -\mathbf{k}_y \operatorname{csch}(\mathbf{k}_y d) & \mathbf{k}_y \coth(\mathbf{k}_y d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{H}}_z^\ell(y_A) \\ \overline{\mathbf{H}}_z^\ell(y_B) \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

### 2.5.2 Expression des champs électromagnétiques tangentiels à une interface en fonction des champs électromagnétiques tangentiels à l'autre interface

Tout d'abord, nous évaluerons l'équation (2.72) en  $y = y_A$  et  $y = y_B$  et nous remplacerons les termes dérivées en les substituant au moyen des expressions données par (2.78) et (2.79), soit en fonction des champs aux deux interfaces. L'équation obtenue est alors :

$$\begin{bmatrix} \left( \epsilon_r \hat{\mathbf{I}} - \hat{\boldsymbol{\lambda}}_z^2 \right) \overline{\mathbf{E}}_x^\ell(y_A) \\ \left( \epsilon_r \hat{\mathbf{I}} - \hat{\boldsymbol{\lambda}}_z^2 \right) \eta_0 \overline{\mathbf{H}}_x^\ell(y_A) \\ \left( \epsilon_r \hat{\mathbf{I}} - \hat{\boldsymbol{\lambda}}_z^2 \right) \overline{\mathbf{E}}_x^\ell(y_B) \\ \left( \epsilon_r \hat{\mathbf{I}} - \hat{\boldsymbol{\lambda}}_z^2 \right) \eta_0 \overline{\mathbf{H}}_x^\ell(y_B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\delta}}_x \hat{\boldsymbol{\delta}}_z & 0 & j\mathbf{k}_{y\coth} & -j\mathbf{k}_{y\csch} \\ -j\epsilon_r \mathbf{k}_{y\coth} & j\epsilon_r \mathbf{k}_{y\csch} & \hat{\boldsymbol{\delta}}_x^* \hat{\boldsymbol{\delta}}_z^* & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{\delta}}_x \hat{\boldsymbol{\delta}}_z & j\mathbf{k}_{y\csch} & -j\mathbf{k}_{y\coth} \\ -j\epsilon_r \mathbf{k}_{y\csch} & j\epsilon_r \mathbf{k}_{y\coth} & 0 & \hat{\boldsymbol{\delta}}_x^* \hat{\boldsymbol{\delta}}_z^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{E}}_z^\ell(y_A) \\ \overline{\mathbf{E}}_z^\ell(y_B) \\ \eta_0 \overline{\mathbf{H}}_z^\ell(y_A) \\ \eta_0 \overline{\mathbf{H}}_z^\ell(y_B) \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

où  $\mathbf{k}_{y\coth} = \frac{\mathbf{k}_y}{k_0} \coth(\mathbf{k}_y d)$  et  $\mathbf{k}_{y\csch} = \frac{\mathbf{k}_y}{k_0} \operatorname{csch}(\mathbf{k}_y d)$ . Nous adopterons ici une définition utilisée dans [19] qui consiste à regrouper les composantes tangentielles  $x$  et  $z$

des champs électromagnétiques discrétisés :

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_{m(A,B)}^{tan} \\ \bar{\mathbf{H}}_{m(A,B)}^{tan} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_{zm}^{\ell}(y_{A,B}) \\ -j\bar{\mathbf{E}}_{zm}^{\ell}(y_{A,B}) \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{H}}_{m(A,B)}^{tan} = \eta_0 \begin{bmatrix} -j\bar{\mathbf{H}}_{zm}^{\ell}(y_{A,B}) \\ \bar{\mathbf{H}}_{zm}^{\ell}(y_{A,B}) \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

où l'indice  $m = 0, 1, \dots, N_c + 1$  est utilisé pour désigner le numéro de la couche diélectrique, en suivant la numérotation illustrée à la figure 1.1. Les couches  $m = 0$  et  $m = N_c + 1$  sont les couches absorbantes qui sont traitées à la section 2.6. Nous traitons ici le cas des couches diélectriques intermédiaires numérotées de  $m = 1$  à  $m = N_c$ .

Après quelques manipulations algébriques utilisant les identités  $\hat{\delta}_{x,z}\hat{\delta}_{x,z}^* = \hat{\lambda}_{x,z}^2$  et  $\mathbf{k}_{ym}^2 = k_0^2 \left( \hat{\lambda}_x^2 + \hat{\lambda}_z^2 - \epsilon_{rm}\hat{\mathbf{I}} \right)$ , on arrive à écrire la matrice de paramètres Z-Y hybride suivante sous l'une ou l'autre forme :

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_{mB}^{tan} \\ \bar{\mathbf{H}}_{mB}^{tan} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}}_m & \bar{\mathbf{Z}}_m \\ \bar{\mathbf{Y}}_m & \bar{\mathbf{V}}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_{mA}^{tan} \\ \bar{\mathbf{H}}_{mA}^{tan} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_{mA}^{tan} \\ \bar{\mathbf{H}}_{mA}^{tan} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}}_m & -\bar{\mathbf{Z}}_m \\ -\bar{\mathbf{Y}}_m & \bar{\mathbf{V}}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_{mB}^{tan} \\ \bar{\mathbf{H}}_{mB}^{tan} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

avec les sous-matrices suivantes :

$$\bar{\mathbf{V}}_m = \begin{bmatrix} \cosh(\mathbf{k}_{ym}d_m) & 0 \\ 0 & \cosh(\mathbf{k}_{ym}d_m) \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

$$\bar{\mathbf{Z}}_m = \frac{k_0}{\epsilon_{rm}} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ym}^{-1} \sinh(\mathbf{k}_{ym}d_m) \left( \hat{\lambda}_x^2 - \epsilon_{rm}\hat{\mathbf{I}} \right) & -\tilde{\delta}\mathbf{k}_{ym}^{-1} \sinh(\mathbf{k}_{ym}d_m) \\ -\tilde{\delta}^*\mathbf{k}_{ym}^{-1} \sinh(\mathbf{k}_{ym}d_m) & \mathbf{k}_{ym}^{-1} \sinh(\mathbf{k}_{ym}d_m) \left( \hat{\lambda}_z^2 - \epsilon_{rm}\hat{\mathbf{I}} \right) \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

$$\bar{\mathbf{Y}}_m = -k_0 \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ym}^{-1} \sinh(\mathbf{k}_{ym}d_m) \left( \hat{\lambda}_z^2 - \epsilon_{rm}\hat{\mathbf{I}} \right) & \tilde{\delta}\mathbf{k}_{ym}^{-1} \sinh(\mathbf{k}_{ym}d_m) \\ \tilde{\delta}^*\mathbf{k}_{ym}^{-1} \sinh(\mathbf{k}_{ym}d_m) & \mathbf{k}_{ym}^{-1} \sinh(\mathbf{k}_{ym}d_m) \left( \hat{\lambda}_x^2 - \epsilon_{rm}\hat{\mathbf{I}} \right) \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

où nous avons utilisé la nouvelle définition  $\tilde{\delta} = j\hat{\delta}_x\hat{\delta}_z$ . Nous disposons maintenant d'une matrice de paramètres hybrides  $Z - Y$  pour les champs électromagnétiques tangents aux interfaces d'une couche diélectrique homogènes. Cette relation, combinée aux paramètres hybrides d'une couche absorbante dérivée à la section suivante, nous permettra de formuler un système d'équations à la section 2.7.

## 2.6 Paramètres $Y$ d'une couche absorbante

À présent, nous disposons des paramètres hybrides  $Z - Y$  qui caractérisent chacune des couches diélectriques de la structure et qui incluent les conditions aux frontières latérales de périodicité. Afin d'être en mesure de formuler complètement le problème, il nous faut caractériser les conditions aux frontières supérieure et inférieure de la structure périodique. Puisque cette dernière est dans l'espace libre, il s'agira de formuler des *conditions aux frontières absorbantes* de part et d'autre. Bien que la notion de condition absorbante adaptée à la méthode des lignes ne soit pas une innovation, la formulation présentée ici a été développée indépendamment par l'auteur.

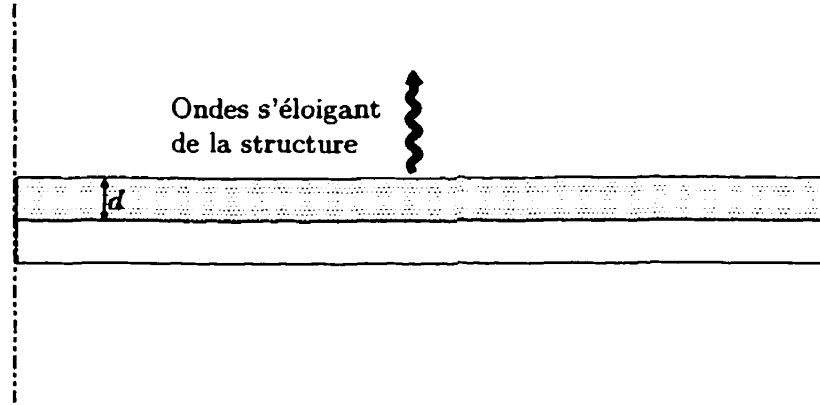
### 2.6.1 Condition absorbante supérieure

Puisque la solution est analytique selon la direction  $y$ , la formulation de la condition absorbante est analytique. Il suffit de choisir, pour la solution de l'équation de Helmholtz (2.50) dans la couche absorbante supérieure, une forme comportant une onde voyageant dans la direction  $+y$  seulement pour chaque composante des champs transformés :

$$\overline{E}_{zi}^{\ell} = A_i e^{-k_{yi}y} \quad (2.86)$$

$$\overline{H}_{zi}^{\ell} = B_i e^{-k_{yi}y} \quad (2.87)$$

avec  $\Re(k_{yi}) > 0$  et  $\Im(k_{yi}) > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_x N_z$



**Figure 2.3:** Condition absorbante

où  $k_{yi}$  est calculé à partir de la racine positive de l'équation (2.51), en prenant pour  $\epsilon_r$  la valeur de la permittivité relative dans le milieu absorbant ( $\epsilon_r = 1,0$  dans l'air). Étant donné la forme des champs transformés, leur dérivée par rapport à  $y$  peut s'exprimer en fonction des champs eux-mêmes :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{E}}_z^\ell}{\partial y} = -\mathbf{k}_y \bar{\mathbf{E}}_z^\ell \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{H}}_z^\ell}{\partial y} = -\mathbf{k}_y \bar{\mathbf{H}}_z^\ell \quad (2.89)$$

En substituant aux dérivées partielles de l'équation (2.72) les expressions ci-haut, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \left( \epsilon_r \hat{\mathbf{I}} - \hat{\lambda}_z^2 \right) \bar{\mathbf{E}}_z^\ell \\ \left( \epsilon_r \hat{\mathbf{I}} - \hat{\lambda}_z^2 \right) \eta_0 \bar{\mathbf{H}}_z^\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\delta}_x \hat{\delta}_z & j \frac{1}{k_0} \mathbf{k}_y \\ -j \frac{\epsilon_r}{k_0} \mathbf{k}_y & \hat{\delta}_x^* \hat{\delta}_z^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_z^\ell \\ \eta_0 \bar{\mathbf{H}}_z^\ell \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

En utilisant les identités  $\hat{\delta}_{x,z} \hat{\delta}_{x,z}^* = \hat{\lambda}_{x,z}^2$  et  $\mathbf{k}_y^2 = k_0^2 \left( \hat{\lambda}_x^2 + \hat{\lambda}_z^2 - \epsilon_r \hat{\mathbf{I}} \right)$ , quelques manipulations algébriques nous permettent d'obtenir les paramètres  $Y$  des champs électromagnétiques à l'interface supérieure de l'antenne, qui est en fait l'interface inférieure

de la couche absorbante, tel qu'illustré à la figure 1.1 :

$$\overline{\mathbf{H}}_{(N_c+1)A}^{tan} = \underbrace{\begin{bmatrix} k_0 \mathbf{k}_{\nu_{N_c+1}}^{-1} \left( \hat{\tilde{\lambda}}_z^2 - \epsilon_{r(N_c+1)} \hat{\mathbf{I}} \right) & k_0 \mathbf{k}_{\nu_{N_c+1}}^{-1} \tilde{\delta} \\ k_0 \mathbf{k}_{\nu_{N_c+1}}^{-1} \tilde{\delta}^* & k_0 \mathbf{k}_{\nu_{N_c+1}}^{-1} \left( \hat{\tilde{\lambda}}_z^2 - \epsilon_{r(N_c+1)} \hat{\mathbf{I}} \right) \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{W}}_{sup}} \overline{\mathbf{E}}_{(N_c+1)A}^{tan} \quad (2.91)$$

où on a utilisé la notation spécifiée en (2.81) pour les champs tangentiels.

### 2.6.2 Condition absorbante inférieure

Sous la structure périodique, on restreindra plutôt la solution à des ondes voyageant dans la direction  $-y$  :

$$\overline{E}_{zi}^{\ell} = A_i e^{k_{\nu_i} y} \quad (2.92)$$

$$\overline{H}_{zi}^{\ell} = B_i e^{k_{\nu_i} y} \quad (2.93)$$

avec  $\Re(k_{\nu_i}) > 0$  et  $\Im(k_{\nu_i}) > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_x N_z$

En suivant le même cheminement qu'à la section précédente, on parvient à la même matrice de paramètres  $Y$ , à un signe près :

$$\overline{\mathbf{H}}_{0B}^{tan} = - \underbrace{\begin{bmatrix} k_0 \mathbf{k}_{\nu_0}^{-1} \left( \hat{\tilde{\lambda}}_z^2 - \epsilon_{r0} \hat{\mathbf{I}} \right) & k_0 \mathbf{k}_{\nu_0}^{-1} \tilde{\delta} \\ k_0 \mathbf{k}_{\nu_0}^{-1} \tilde{\delta}^* & k_0 \mathbf{k}_{\nu_0}^{-1} \left( \hat{\tilde{\lambda}}_z^2 - \epsilon_{r0} \hat{\mathbf{I}} \right) \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{W}}_{inf}} \overline{\mathbf{E}}_{0B}^{tan} \quad (2.94)$$

où l'indice 0 désigne la couche absorbante inférieure tel que montré à la figure 1.1.

Nous avons maintenant caractérisé toutes les couches diélectriques et les deux couches absorbantes sous forme de relations entre les champs électromagnétiques

tangentiels aux interfaces. En utilisant les résultats des équations (2.82), (2.91) et (2.94), nous pourrions formuler un système d'équations pour la structure considérée.

## 2.7 Construction du système d'équations transformé

Dans cette section, nous allons construire un système d'équations homogène (i.e. sans excitation) dans le domaine transformé avec pour inconnues des échantillons de champ électrique tangentiel et de densité surfacique de courant électrique aux interfaces entre les couches diélectriques. La formulation développée ici diffère de l'approche présentée dans [19]. Elle a un caractère général permettant l'analyse de structures comportant de multiples couches diélectriques, quel qu'en soit le nombre.

### 2.7.1 Lignes intermédiaires du système d'équations

Les valeurs de champ électrique tangentiel aux interfaces centraux (i.e. les interfaces numérotés de 0 à  $N_c$ , voir figure 1.1) sont couplées trois par trois, tel que nous le montrerons ici. Pour ce faire, nous utiliserons la version de gauche de l'équation (2.82) et les conditions aux frontières à chaque interface :

$$\left. \begin{aligned} \overline{\mathbf{E}}_{mA}^{tan} &= \overline{\mathbf{E}}_{(m-1)B}^{tan} \\ \overline{\mathbf{H}}_{mA}^{tan} &= \overline{\mathbf{H}}_{(m-1)B}^{tan} - \overline{\mathbf{J}}_{(m-1)}^{tan} \end{aligned} \right\}, m = 1, 2, \dots, N_c + 1 \quad (2.95)$$

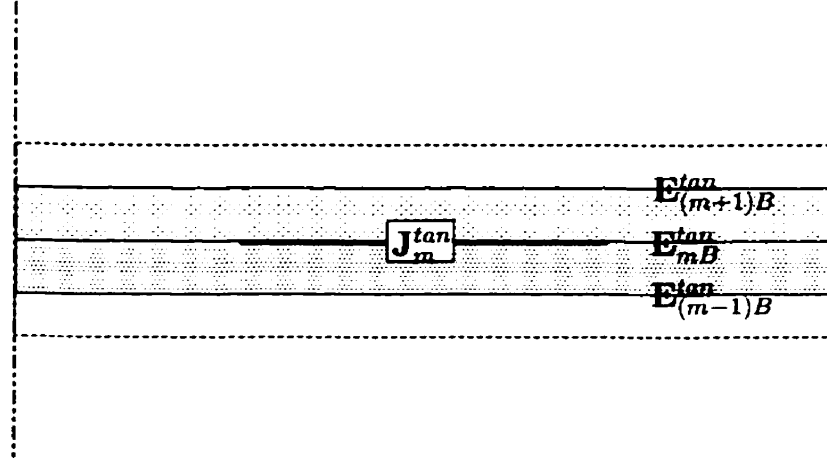
où  $\overline{\mathbf{J}}_m^{tan}$  représente la densité surfacique de courant électrique à l'interface entre les couches diélectrique  $m$  et  $m + 1$  (voir figure 2.4) et est défini comme suit :

$$\overline{\mathbf{J}}_m^{tan} = \eta_0 \begin{bmatrix} j\overline{\mathbf{J}}_{zm}^{\ell} \\ \overline{\mathbf{J}}_{zm}^{\ell} \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

Les vecteurs  $\overline{\mathbf{J}}_{zm}^{\ell}$  et  $\overline{\mathbf{J}}_{zm}^{\ell}$  sont liés à  $\mathbf{J}_{zm}^{\ell}$  et  $\mathbf{J}_{zm}^{\ell}$  par :

$$\mathbf{J}_{zm}^{\ell} = \hat{\mathbf{S}}_h^* \hat{\mathbf{T}}_{hn} \overline{\mathbf{J}}_{zm}^{\ell} \quad \mathbf{J}_{zm}^{\ell} = \hat{\mathbf{S}}_e^* \hat{\mathbf{T}}_{en} \overline{\mathbf{J}}_{zm}^{\ell} \quad (2.97)$$





**Figure 2.4:** Couche diélectrique intermédiaire

À l'aide de (2.82) et de (2.95), on peut écrire :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{H}}_{mA}^{tan} &= \bar{\mathbf{V}}_m^{-1} \left( \bar{\mathbf{H}}_{mB}^{tan} - \bar{\mathbf{Y}}_m \bar{\mathbf{E}}_{mA}^{tan} \right) \\ &= \bar{\mathbf{V}}_m^{-1} \left( \bar{\mathbf{H}}_{(m+1)A}^{tan} + \bar{\mathbf{J}}_m^{tan} - \bar{\mathbf{Y}}_m \bar{\mathbf{E}}_{(m-1)B}^{tan} \right)\end{aligned}\quad (2.98)$$

De plus, (2.82) nous donne :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{H}}_{(m+1)A}^{tan} &= \bar{\mathbf{Z}}_{m+1}^{-1} \left( \bar{\mathbf{E}}_{(m+1)B}^{tan} - \bar{\mathbf{V}}_{m+1} \bar{\mathbf{E}}_{(m+1)A}^{tan} \right) \\ &= \bar{\mathbf{Z}}_{m+1}^{-1} \left( \bar{\mathbf{E}}_{(m+1)B}^{tan} - \bar{\mathbf{V}}_{m+1} \bar{\mathbf{E}}_{mB}^{tan} \right)\end{aligned}\quad (2.99)$$

En insérant (2.99) dans (2.98), nous avons :

$$\bar{\mathbf{H}}_{mA}^{tan} = \bar{\mathbf{V}}_m^{-1} \left( \bar{\mathbf{Z}}_{m+1}^{-1} \bar{\mathbf{E}}_{(m+1)B}^{tan} - \bar{\mathbf{Z}}_{m+1}^{-1} \bar{\mathbf{V}}_{m+1} \bar{\mathbf{E}}_{mB}^{tan} - \bar{\mathbf{Y}}_m \bar{\mathbf{E}}_{(m-1)B}^{tan} + \bar{\mathbf{J}}_m^{tan} \right) \quad (2.100)$$

Or, on sait d'après (2.82) et (2.95) que  $\bar{\mathbf{E}}_{mB}^{tan} = \bar{\mathbf{V}}_m \bar{\mathbf{E}}_{(m-1)B}^{tan} + \bar{\mathbf{Z}}_m \bar{\mathbf{H}}_{mA}^{tan}$ . En insé-

rant (2.100) dans cette dernière équation, on trouve :

$$\begin{aligned} \left( \bar{\mathbf{V}}_m \bar{\mathbf{Z}}_m^{-1} \bar{\mathbf{V}}_m - \bar{\mathbf{Y}}_m \right) \bar{\mathbf{E}}_{(m-1)B}^{tan} + \left( -\bar{\mathbf{V}}_m \bar{\mathbf{Z}}_m^{-1} - \bar{\mathbf{Z}}_{m+1}^{-1} \bar{\mathbf{V}}_{m+1} \right) \bar{\mathbf{E}}_{mB}^{tan} \\ + \bar{\mathbf{Z}}_{m+1}^{-1} \bar{\mathbf{E}}_{(m+1)B}^{tan} + \bar{\mathbf{J}}_m^{tan} = 0 \end{aligned} \quad (2.101)$$

pour  $m = 1, 2, \dots, N_c - 1$ . On peut démontrer l'identité suivante<sup>2</sup> :

$$\bar{\mathbf{V}}_m \bar{\mathbf{Z}}_m^{-1} \bar{\mathbf{V}}_m - \bar{\mathbf{Y}}_m = \bar{\mathbf{Z}}_m^{-1} \quad (2.102)$$

Nous définirons  $\bar{\mathbf{R}}_m = \bar{\mathbf{Z}}_m^{-1}$ . Après l'inversion<sup>3</sup> de  $\bar{\mathbf{Z}}_m$  telle que définie par (2.84), on obtient :

$$\bar{\mathbf{R}}_m = -k_0 \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ym}^{-1} \operatorname{csch}(\mathbf{k}_{ym} d_m) & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_{ym}^{-1} \operatorname{csch}(\mathbf{k}_{ym} d_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\bar{\lambda}}_z^2 - \epsilon_{rm} & \bar{\delta} \\ \bar{\delta}^* & \hat{\bar{\lambda}}_x^2 - \epsilon_{rm} \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

Lors du calcul numérique de l'expression  $k_0 \operatorname{csch}(\mathbf{k}_{ym}^i) / \mathbf{k}_{ym}^i$  à l'intérieur de (2.103), il importe de prendre des précautions pour le cas où  $\mathbf{k}_{ym}^i$  est réel ; en effet, l'expression  $k_0 \operatorname{csch}(\mathbf{k}_{ym}^i d_m)$  décroît plus rapidement avec l'augmentation de  $\mathbf{k}_{ym}^i$  que  $\mathbf{k}_{ym}^{i-1}$  lui-même. Le quotient des deux fonctions tend donc vers zéro pour des valeurs réelles élevées de  $\mathbf{k}_{ym}^i$  ; lors de la programmation du calcul de cette expression, il faut donc, au-delà d'un seuil produisant un quotient égal à la valeur minimale représentable, forcer le quotient à la valeur zéro afin d'éviter l'indétermination numérique 0/0 qui survient pour des valeurs réelles élevées de  $\mathbf{k}_{ym}^i$ . Plus précisément, on doit forcer le quotient à la valeur zéro lorsque  $k_0 \left| \mathbf{k}_{ym}^{i-1} \right| \operatorname{csch}(\mathbf{k}_{ym}^i d_m) \leq MIN$ , où  $MIN$  est la valeur minimale représentable sur ordinateur. Ce seuil survient lorsque l'expression

<sup>2</sup>Voir l'annexe II pour la démonstration

<sup>3</sup>Voir l'annexe II pour les détails de l'inversion

suivante est vérifiée :

$$\ln \left( k_0 \left| k_{ym}^{i-1} \right| \right) - \left| k_{ym}^i d_m \right| + \ln 2 \leq \ln (MIN) \quad (2.104)$$

D'autre part, puisque  $\overline{\mathbf{V}}_m$  est diagonale, on peut définir :

$$\overline{\mathbf{U}}_m = -\overline{\mathbf{V}}_m \overline{\mathbf{Z}}_m^{-1} = -\overline{\mathbf{Z}}_m^{-1} \overline{\mathbf{V}}_m \quad m = 1, 2, \dots, N_c \quad (2.105)$$

$$\overline{\mathbf{Q}}_m = \overline{\mathbf{U}}_m + \overline{\mathbf{U}}_{m+1} \quad m = 2, 3, \dots, N_c - 1 \quad (2.106)$$

où la matrice  $\overline{\mathbf{U}}_m$  simplifiée est facilement obtenue à partir de (2.103) et (2.83) :

$$\overline{\mathbf{U}}_m = k_0 \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ym}^{-1} \coth (\mathbf{k}_{ym} d_m) & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_{ym}^{-1} \coth (\mathbf{k}_{ym} d_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_z^2 - \epsilon_{rm} & \tilde{\delta} \\ \tilde{\delta}^* & \hat{\lambda}_z^2 - \epsilon_{rm} \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

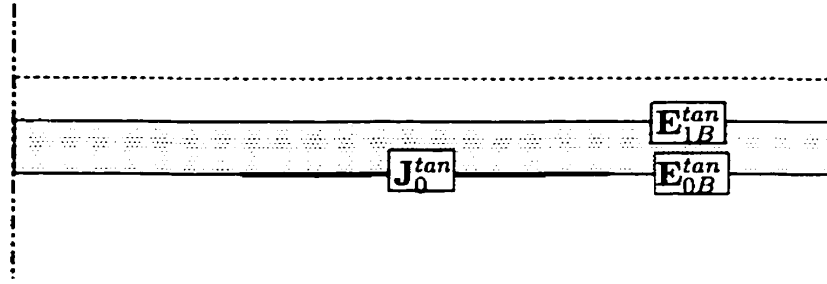
On peut alors réécrire (2.101) en termes des définitions (2.106) et (2.107) :

$$\overline{\mathbf{R}}_m \overline{\mathbf{E}}_{(m-1)B}^{tan} + \overline{\mathbf{Q}}_m \overline{\mathbf{E}}_{mB}^{tan} + \overline{\mathbf{R}}_{(m+1)} \overline{\mathbf{E}}_{(m+1)B}^{tan} + \overline{\mathbf{J}}_m^{tan} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N_c - 1 \quad (2.108)$$

Cette équation permet de constater que les champs électriques tangentiels des interfaces centrales sont effectivement couplées trois par trois. L'équation (2.108) sera donc la  $m^e$  ligne du système d'équations, où  $m = 1, 2, \dots, N_c - 1$ .

### 2.7.2 première ligne du système d'équations (ligne numéro 0)

À l'extrémité inférieure de la structure définie par la figure 1.1, on cherche une équation mettant en jeu les valeurs du champ électrique tangentiel aux interfaces 0 et 1, tel qu'illustré à la figure 2.5. On utilisera les conditions aux frontières à l'interface



**Figure 2.5:** Couche diélectrique inférieure

$m = 0$  :

$$\bar{\mathbf{E}}_{1A}^{tan} = \bar{\mathbf{E}}_{0B}^{tan} \quad (2.109)$$

$$\bar{\mathbf{H}}_{1A}^{tan} = \bar{\mathbf{H}}_{0B}^{tan} - \bar{\mathbf{J}}_0^{tan} \quad (2.110)$$

et la condition absorbante à la même interface, soit  $\bar{\mathbf{H}}_{0B}^{tan} = -\bar{\mathbf{W}}_{inf} \bar{\mathbf{E}}_{0B}^{tan}$  (voir (2.94)).

Ces deux relations nous donnent :

$$\bar{\mathbf{H}}_{1A}^{tan} = -\bar{\mathbf{W}}_{inf} \bar{\mathbf{E}}_{0B}^{tan} - \bar{\mathbf{J}}_0^{tan} \quad (2.111)$$

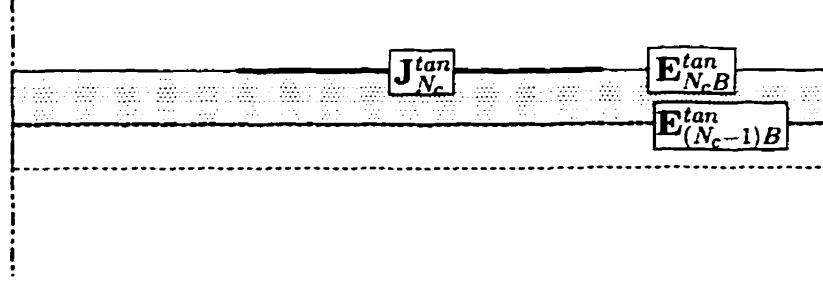
Si on utilise (2.82) et (2.109) pour exprimer  $\bar{\mathbf{H}}_{1A}^{tan}$  en fonction de  $\bar{\mathbf{E}}_{0B}^{tan}$  et  $\bar{\mathbf{E}}_{1B}^{tan}$ , on arrive à :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}_{1A}^{tan} &= -\bar{\mathbf{V}}_1 \bar{\mathbf{Z}}_1^{-1} \bar{\mathbf{E}}_{0B}^{tan} + (\bar{\mathbf{V}}_1 \bar{\mathbf{Z}}_1^{-1} \bar{\mathbf{V}}_1 - \bar{\mathbf{Y}}_1) \bar{\mathbf{E}}_{1B}^{tan} \\ &= \bar{\mathbf{U}}_1 \bar{\mathbf{E}}_{0B}^{tan} + \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{E}}_{1B}^{tan} \end{aligned} \quad (2.112)$$

En égalisant (2.111) et (2.112), on peut écrire

$$\underbrace{(\bar{\mathbf{W}}_{inf} + \bar{\mathbf{U}}_1)}_{\bar{\mathbf{Q}}_1} \bar{\mathbf{E}}_{0B}^{tan} + \bar{\mathbf{R}}_1 \bar{\mathbf{E}}_{1B}^{tan} + \bar{\mathbf{J}}_0^{tan} = 0 \quad (2.113)$$

où l'on a défini  $\bar{\mathbf{Q}}_1$  qui n'avait pas été défini en (2.106). L'équation (2.113) constituera la première ligne du système d'équations.



**Figure 2.6:** Couche diélectrique supérieure

### 2.7.3 Dernière ligne du système d'équations (ligne numéro $N_c$ )

À l'extrémité supérieure de la structure, on cherche une équation mettant en jeu les valeurs du champ électrique tangentiel aux interfaces  $N_c - 1$  et  $N_c$ , tel qu'illustré à la figure 2.6. On utilise les conditions aux frontières à l'interface  $m = N_c$  :

$$\overline{\mathbf{E}}_{(N_c+1)A}^{tan} = \overline{\mathbf{E}}_{N_c B}^{tan} \quad (2.114)$$

$$\overline{\mathbf{H}}_{(N_c+1)A}^{tan} = \overline{\mathbf{H}}_{N_c B}^{tan} - \mathbf{J}_{N_c}^{tan} \quad (2.115)$$

et la condition absorbante à la même interface, soit  $\overline{\mathbf{H}}_{(N_c+1)A}^{tan} = \overline{\mathbf{W}}_{sup} \overline{\mathbf{E}}_{(N_c+1)A}^{tan} = \overline{\mathbf{W}}_{sup} \overline{\mathbf{E}}_{N_c B}^{tan}$  (voir (2.91)). Des développements similaires à ceux effectués en 2.7.2 à l'aide de (2.82), (2.95) et la condition absorbante nous donnent l'équation suivante pour la  $N_c^{ième}$  ligne du système d'équations :

$$\overline{\mathbf{R}} \overline{\mathbf{E}}_{(N_c-1)B}^{tan} + \underbrace{(\overline{\mathbf{U}}_{N_c} + \overline{\mathbf{W}}_{sup})}_{\overline{\mathbf{Q}}_{N_c}} \overline{\mathbf{E}}_{N_c}^{tan} + \overline{\mathbf{J}}_{N_c}^{tan} = 0 \quad (2.116)$$

où l'on a défini  $\overline{\mathbf{Q}}_{N_c}$  qui n'avait pas été défini en (2.106). L'équation (2.116) constituera la  $N_c^{ième}$  et dernière ligne du système d'équations.

### 2.7.4 Système d'équations global homogène dans le domaine transformé

Le système d'équations transformé homogène (c'est-à-dire sans excitation) pour une structure à  $N_c$  couches diélectriques peut donc s'écrire, selon (2.101), (2.113) et (2.116), comme suit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{Q}_0 & \bar{R}_1 & & & \\ \bar{R}_1 & \bar{Q}_1 & \bar{R}_2 & & \\ & \bar{R}_2 & \bar{Q}_2 & \bar{R}_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \bar{R}_{N_c-1} & \bar{Q}_{N_c-1} & \bar{R}_{N_c} \\ & & & & \bar{R}_{N_c} & \bar{Q}_{N_c} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{M}}_E} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_{0B}^{tan} \\ \bar{\mathbf{E}}_{1B}^{tan} \\ \bar{\mathbf{E}}_{2B}^{tan} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{E}}_{(N_c-1)B}^{tan} \\ \bar{\mathbf{E}}_{N_cB}^{tan} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{E}}^{tan}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{J}}_0^{tan} \\ \bar{\mathbf{J}}_1^{tan} \\ \bar{\mathbf{J}}_2^{tan} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{J}}_{N_c-1}^{tan} \\ \bar{\mathbf{J}}_{N_c}^{tan} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{J}}^{tan}} = 0 \quad (2.117)$$

où les  $\bar{\mathbf{R}}_m$  sont définis par (2.103) et  $\bar{\mathbf{Q}}_m$  est défini par (2.106), (2.113) et (2.116) ; la définition de  $\bar{\mathbf{Q}}_m$  est résumée ici :

$$\bar{\mathbf{Q}}_m = \begin{cases} \bar{\mathbf{W}}_{inf} + \bar{\mathbf{U}}_1 & \text{pour } m = 0, \\ \bar{\mathbf{U}}_m + \bar{\mathbf{U}}_{m+1} & \text{pour } m = 1, 3, \dots, N_c - 1, \\ \bar{\mathbf{U}}_{N_c} + \bar{\mathbf{W}}_{sup} & \text{pour } m = N_c. \end{cases} \quad (2.118)$$

Le système d'équations transformées (2.117) a plus d'inconnues que d'équations, puisque pour chaque niveau on a un vecteur de champ électrique tangentiel transformé et un vecteur de densité surfacique de courant électrique transformée inconnus. La section suivante est consacrée à la réduction du système d'équations dans

le domaine spatial, destinée à ramener le nombre d'inconnues au niveau du nombre d'équations à partir des motifs métalliques à chaque interface.

## 2.8 Réduction du système d'équations dans le domaine spatial

Il faut maintenant ramener le système d'équations transformées (2.117) dans le domaine spatial. Nous écrirons d'abord sous forme compacte les relations entre les quantités spatiales et transformées, données aux équations (2.65) et (2.97) :

$$\mathbf{E}_{mB}^{tan,norm} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_h \mathbf{E}_{zm}^\ell \\ -j \hat{\mathbf{S}}_e \mathbf{E}_{zm}^\ell \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{T}}_{hn} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{T}}_{en} \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{T}}} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_{zm}^\ell \\ -j \bar{\mathbf{E}}_{zm}^\ell \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

$$\mathbf{J}_m^{tan,norm} = \eta_0 \begin{bmatrix} j \hat{\mathbf{S}}_h \mathbf{J}_{zm}^\ell \\ \hat{\mathbf{S}}_e \mathbf{J}_{zm}^\ell \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{T}}_{hn} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{T}}_{en} \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{T}}} \begin{bmatrix} \eta_0 j \bar{\mathbf{J}}_{zm}^\ell \\ \eta_0 \bar{\mathbf{J}}_{zm}^\ell \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

où  $\mathbf{E}_{mB}^{tan,norm}$  et  $\mathbf{J}_m^{tan,norm}$  sont des quantités normalisées par rapport à la phase. À la lumière de ces deux équations, il devient clair que, pour formuler le système d'équations en termes de ces quantités spatiales normalisées, il suffit de multiplier chacune des sous-matrices du système d'équation (2.117) à gauche par  $\check{\mathbf{T}}$  et à droite

par  $\check{\mathbf{T}}^{t*}$ , ce qui nous donne le système suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 & \mathbf{R}_1 & & & \\ \mathbf{R}_1 & \mathbf{Q}_1 & \mathbf{R}_2 & & \\ & \mathbf{R}_2 & \mathbf{Q}_2 & \mathbf{R}_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \mathbf{R}_{N_c-1} & \mathbf{Q}_{N_c-1} & \mathbf{R}_{N_c} \\ & & & & \mathbf{R}_{N_c} & \mathbf{Q}_{N_c} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{M}}_E} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{0B}^{tan,norm} \\ \mathbf{E}_{1B}^{tan,norm} \\ \mathbf{E}_{2B}^{tan,norm} \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{(N_c-1)B}^{tan,norm} \\ \mathbf{E}_{N_cB}^{tan,norm} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{E}}^{tan,norm}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{J}_0^{tan,norm} \\ \mathbf{J}_1^{tan,norm} \\ \mathbf{J}_2^{tan,norm} \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{N_c-1}^{tan,norm} \\ \mathbf{J}_{N_c}^{tan,norm} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{J}}^{tan,norm}} = 0 \quad (2.121)$$

où  $\mathbf{Q}_m = \check{\mathbf{T}} \overline{\mathbf{Q}}_m \check{\mathbf{T}}^{t*}$  et  $\mathbf{R}_m = \check{\mathbf{T}} \overline{\mathbf{R}}_m \check{\mathbf{T}}^{t*}$ .

Afin que ce système d'équations ait une seule solution, il faut réduire le nombre d'inconnues pour qu'il soit égal au nombre d'équations. Pour ce faire, nous ferons appel aux motifs métalliques des diverses interfaces de la structure. Puisqu'on considère des couches métalliques à conductivité parfaite, on sait que le champ électrique tangentiel et la densité de courant électrique ne peuvent être non nuls en un même point sur une interface. Ainsi, nous avons :

$$E_{zm,i_m}^\ell = 0 \text{ et } E_{zm,i_m}^\ell = 0 \quad \text{sur le métal} \quad (2.122)$$

$$J_{zm,i_f}^\ell = 0 \text{ et } J_{zm,i_f}^\ell = 0 \quad \text{hors du métal} \quad (2.123)$$

où  $i_m$  prend les valeurs des numéros de lignes passant par le métal et  $i_f$  prend les valeurs des numéros de lignes ne passant pas par le métal ; le positionnement des lignes par rapport aux motifs métalliques sera abordé à la section 2.12. Pour le système (2.121), la réduction est effectuée en ne conservant que les lignes et les colonnes du système correspondant à la région non recouverte de métal, c'est-à-dire



là où la densité de courant électrique doit être nulle. Le système d'équation ainsi réduit devient :

$$\tilde{\mathbf{M}}_{Ered} \tilde{\mathbf{E}}_{red}^{tan, norm} = 0 \quad (2.124)$$

ce dernier système contient alors autant d'inconnues que d'équations. Il s'agit toutefois d'un système homogène ne comportant aucune excitation. L'application d'une excitation sera considérée à la section 2.10.

## 2.9 Alternatives dans le choix des inconnues du système d'équations

La taille du système d'équations (2.124) est égale à la taille du vecteur  $\tilde{\mathbf{E}}_{red}^{tan, norm}$ . Cette dernière correspond au nombre de points de discrétisation placés sur les portions non recouvertes de métal des interfaces de la structure multicouche, c'est-à-dire là où la densité de courant électrique doit être nulle. Supposons que l'on ait écrit (2.121) de façon à obtenir  $\tilde{\mathbf{M}}_J \tilde{\mathbf{J}}^{tan, norm} + \tilde{\mathbf{E}}^{tan, norm} = 0$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}_J = \tilde{\mathbf{M}}_E^{-1}$ . La réduction du système aurait alors été effectuée en conservant toutes les lignes et les colonnes du système d'équations correspondant à la région métallisée, c'est-à-dire là où le champ électrique doit être nul. La taille du système réduit  $\tilde{\mathbf{M}}_{Jred} \tilde{\mathbf{J}}_{red}^{tan, norm} = 0$  aurait alors été égale au nombre de points de discrétisation placés sur les portions métallisées des interfaces de la structure multicouche.

Dans les deux cas, la taille du système d'équations est différente et dépend de la proportion de métal aux interfaces de la structure multicouche. Or, le temps de calcul et la taille mémoire nécessaires pour résoudre un système d'équations dépendent en grande partie du nombre d'inconnues, quelle que soit la méthode de résolution employée. Il serait donc judicieux de choisir la forme du système d'équations qui réduit au minimum le nombre d'inconnues.

Plutôt que de choisir entre  $\tilde{\mathbf{E}}_{red}^{tan, norm}$  et  $\tilde{\mathbf{J}}_{red}^{tan, norm}$  comme vecteur d'inconnues, il serait possible de sélectionner à chaque interface le vecteur d'inconnues (champ élec-

trique ou densité de courant électrique) qui réduit au minimum le nombre d'inconnues pour cette interface. Ainsi, pour les couches comportant une grande proportion de métal, on choisirait le champ électrique comme inconnue, alors que pour les couches ne comportant qu'une petite proportion de métal, on opterait pour la densité de courant électrique.

Nous dénoterons  $\tilde{\mathbf{X}}$  le vecteur d'inconnues choisi, composé d'une combinaison d'échantillons de champ électrique et de densité de courant électrique. Pour chacune des interfaces, le super-vecteur  $\tilde{\mathbf{X}}$  contiendra donc soit l'ensemble des échantillons de champ électrique tangentiel, soit l'ensemble des échantillons de densité surfacique de courant électrique correspondant à cette interface. Le vecteur  $\tilde{\mathbf{Y}}$ , lui, représentera le complément de  $\tilde{\mathbf{X}}$ , c'est-à-dire qu'il sera composé des vecteurs  $\mathbf{E}_{mB}^{tan,norm}$  et  $\mathbf{J}_m^{tan,norm}$  n'ayant pas été choisis comme inconnues. Suivant cette notation, on cherchera la matrice hybride  $\tilde{\mathbf{M}}_H$  du système :

$$\tilde{\mathbf{M}}_H \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{Y}} = 0 \quad (2.125)$$

Par exemple, dans le cas d'un réseau périodique d'antennes plaques couplées par fente (voir figure 1.3), nous avons deux couches diélectriques. L'interface 0 ne comporte pas de métal, c'est pourquoi nous choisirons la densité de courant électrique  $\mathbf{J}_0^{tan,norm}$  comme vecteur d'inconnues ; ce vecteur sera complètement éliminé lors de la réduction, n'ajoutant aucune inconnue au système. À l'interface 1, nous avons une fente, ce qui implique du métal sur une très grande proportion de l'interface ; nous choisirons donc le champ électrique  $\mathbf{E}_{1B}^{tan,norm}$  comme vecteur d'inconnues sur ce niveau pour réduire au minimum le nombre d'inconnues. Finalement, supposons que l'interface 2 comporte une antenne plaque qui recouvre moins de 50% de la surface de la cellule à cet interface, de sorte que nous choisirons  $\mathbf{J}_2^{tan,norm}$  comme vecteur

d'inconnues sur ce niveau. Les vecteurs  $\tilde{\mathbf{X}}$  et  $\tilde{\mathbf{Y}}$ , dans ce cas, seraient :

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_0^{tan,norm} \\ \mathbf{E}_{1B}^{tan,norm} \\ \mathbf{J}_2^{tan,norm} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{0B}^{tan,norm} \\ \mathbf{J}_1^{tan,norm} \\ \mathbf{E}_{2B}^{tan,norm} \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

La matrice hybride  $\tilde{\mathbf{M}}_H$  de (2.125) peut être obtenue à partir de la matrice  $\tilde{\mathbf{M}}_E$  en suivant un algorithme approprié. Nous passerons pour ce faire dans le domaine transformé et chercherons à obtenir  $\tilde{\mathbf{M}}_H$  à partir de  $\tilde{\mathbf{M}}_E$  ; les sous-matrices  $\tilde{\mathbf{M}}_H(i, k)$  de  $\tilde{\mathbf{M}}_H$  pourront ensuite être récupérées en calculant pour chaque sous-matrice :

$$\tilde{\mathbf{M}}_H(i, k) = \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{M}}_H(i, k) \tilde{\mathbf{T}}^{t*}, \quad i = 0, 1, \dots, N_c \quad k = 0, 1, \dots, N_c \quad (2.127)$$

Quelques manipulations du système suffisent pour déduire l'algorithme présenté au tableau 2.1. Il est à noter que cet algorithme a été développé de façon indépendante.

**Tableau 2.1:** Algorithme de calcul de la matrice  $\tilde{\mathbf{M}}_H$  à partir de la matrice  $\tilde{\mathbf{M}}_E$

1. Placer le contenu de  $\tilde{\mathbf{M}}_E$  dans  $\tilde{\mathbf{M}}_H$  :  $\tilde{\mathbf{M}}_H \leftarrow \tilde{\mathbf{M}}_E$
2. Pour toutes les interfaces  $m$  où l'on désire  $\mathbf{J}_m^{tan,norm}$  comme inconnue,
  - (a) Inverser la sous-matrice  $\tilde{\mathbf{M}}_H(m, m)$  :
 
$$\tilde{\mathbf{M}}_H(m, m) \leftarrow \left( \tilde{\mathbf{M}}_H(m, m) \right)^{-1}$$
  - (b) Pour toutes les colonnes  $k \neq m$ , faire :
 
$$\tilde{\mathbf{M}}_H(m, k) \leftarrow \tilde{\mathbf{M}}_H(m, m) \tilde{\mathbf{M}}_H(m, k)$$
  - (c) Pour toutes les lignes  $i \neq m$ , faire :
    - i. Pour toutes les colonnes  $k \neq m$ , faire :
 
$$\tilde{\mathbf{M}}_H(i, k) \leftarrow \tilde{\mathbf{M}}_H(i, k) - \tilde{\mathbf{M}}_H(i, m) \tilde{\mathbf{M}}_H(m, k)$$
    - ii. Pour la colonne  $m$ , faire :
 
$$\tilde{\mathbf{M}}_H(i, m) \leftarrow -\tilde{\mathbf{M}}_H(i, m) \tilde{\mathbf{M}}_H(m, m)$$

Toutes les opérations matricielles données au tableau 2.1, et en particulier les inversions matricielles, sont grandement simplifiées par le fait qu'elles sont effectuées dans le domaine transformé, dans lequel toutes les sous-matrices de  $\tilde{\mathbf{M}}_H$  sont *diagonales*. En effet, l'inversion d'une matrice diagonale est effectuée tout simplement en inversant chacun des termes de la diagonale. Il en va de même pour les produits matriciels, qui sont réduits à de simples produits entre les éléments correspondants de la diagonale. La complexité de calcul de cette étape est en conséquence négligeable vis-à-vis des opérations subséquentes visant à inverser la matrice réduite.

Finalement, la réduction du système (2.125) est effectuée en ne conservant que les lignes et les colonnes de la matrice  $\tilde{\mathbf{M}}_H$  correspondant aux éléments non nuls du vecteur  $\tilde{\mathbf{X}}$ ; ces éléments non nuls sont soit le champ électrique aux points de discrétisation non recouverts de métal, soit la densité de courant électrique aux points de discrétisation métallisés. Le système homogène réduit aura donc la forme :

$$\tilde{\mathbf{M}}_{Hred}\tilde{\mathbf{X}}_{red} = 0 \quad (2.128)$$

## 2.10 Application d'une source de champ ou de courant électrique

Les systèmes d'équations (2.124) et (2.128) sont homogènes; ils ne comportent aucune excitation et ont donc plusieurs solutions. Or, nous nous intéressons ici à la solution unique correspondant à l'application d'une source donnée.

Dans le but de disposer d'un outil de calcul le plus général possible, nous ne nous attarderons pas, dans ce chapitre, à la spécification d'une forme de source physique en particulier. Nous formulerons plutôt une forme générale de source distribuée à laquelle pourront s'adapter les sources physiques qui nous intéressent. Ainsi, deux types de source seront permises :

- Source de champ électrique tangentiel distribuée sur une portion ou la totalité d'une interface ;

- Source de densité de courant électrique distribuée sur une portion ou la totalité d'une interface.

Dans les deux cas, les sources appliquées seront des sources idéales, c'est-à-dire qu'elles spécifieront soit le champ électrique tangentiel *total*, soit la densité de courant électrique *totale*.

Suivant la répartition des vecteurs  $\mathbf{E}_{mB}^{tan, norm}$  et  $\mathbf{J}_m^{tan, norm}$  entre les «super-vecteurs»  $\tilde{\mathbf{X}}$  et  $\tilde{\mathbf{Y}}$ , la source distribuée considérée à l'interface  $m_s$  sera notée source «X» ou source «Y». Plus exactement, si la source se trouve à l'interface  $m_s$ , alors on a les scénarios possibles suivants :

$\mathbf{X}_{m_s} = \mathbf{E}_{m_s, B}^{tan}$ ET on applique une source de champ électrique tangentiel distribuée	}	on a une source «X»
<i>OU</i>		
$\mathbf{X}_{m_s} = \mathbf{J}_{m_s}^{tan}$ ET on applique une source de densité de courant électrique distribuée		
$\mathbf{Y}_{m_s} = \mathbf{E}_{m_s, B}^{tan}$ ET on applique une source de champ électrique tangentiel distribuée	}	on a une source «Y»
<i>OU</i>		
$\mathbf{Y}_{m_s} = \mathbf{J}_{m_s}^{tan}$ ET on applique une source de densité de courant électrique distribuée		

En résumé, la source distribuée est du type «X» si elle est de la même nature ( $E$  ou  $J$ ) que l'élément  $m_s$  du super-vecteur  $\tilde{\mathbf{X}}$ , où  $m_s$  est l'indice de l'interface le long de laquelle est appliquée la source distribuée ; à l'opposé, elle est du type «Y» s'il s'agit d'une source de même nature que l'élément  $m_s$  du super-vecteur  $\tilde{\mathbf{Y}}$ . Voyons maintenant à l'aide de deux exemples comment est appliquée la source pour exciter le système d'équations.

### 2.10.1 Application d'une source distribuée «X»

Prenons le cas de la structure illustrée à la figure 1.3, pour lequel les vecteurs  $\tilde{\mathbf{X}}$  et  $\tilde{\mathbf{Y}}$  choisis sont tels que décrits à l'équation (2.126). Si la source appliquée est une distribution de champ électrique dans la fente à l'interface  $m_s = 1$ , alors on peut remplacer l'étage 1 du vecteur d'inconnues  $\tilde{\mathbf{X}}$  de l'équation (2.125) par une partie source et une partie induite :

$$\tilde{\mathbf{M}}_H \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_1^{induit} \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_0 \\ \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} = -\underbrace{\tilde{\mathbf{M}}_H \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{X}_1^{source} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}} \quad (2.129)$$

où  $\mathbf{X}_1^{source} = \mathbf{E}_{1,source}^{tan,norm}$  contient la source appliquée à l'interface  $m_s = 1$  et  $\mathbf{X}_1^{induit} = \mathbf{E}_{1,induit}^{tan,norm}$  est le champ électrique tangentiel induit à cette même interface. Tel qu'expliqué plus haut, nous désirons appliquer une source idéale. C'est pourquoi il faut imposer, lors de la réduction du système,  $\mathbf{X}_{li}^{induit} = \mathbf{E}_{li,induit}^{tan,norm} = 0$  pour tous les éléments  $i$  correspondants à des positions incluses dans la source distribuée, en plus des positions correspondant au métal où le champ électrique tangentiel total doit être nul. Ceci nous mène à un système d'équations réduit de la forme suivante :

$$\tilde{\mathbf{M}}_{Hred'} \tilde{\mathbf{X}}_{red'} = \tilde{\mathbf{B}}_{red'} \quad (2.130)$$

Ce système d'équations comporte donc moins d'inconnues que le système d'équations homogène correspondant (2.128) à cause de la réduction supplémentaire associée à la source «X».

### 2.10.2 Application d'une source distribuée «Y»

Toujours en considérant l'exemple de la figure 1.3, nous avons maintenant une source distribuée de densité de courant électrique appliquée à l'interface  $m_s = 1$ , ce

qui nous permet d'écrire :

$$\tilde{\mathbf{M}}_H \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_0 \\ \mathbf{Y}_1^{induit} \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{Y}_1^{source} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}} \quad (2.131)$$

où  $\mathbf{Y}_1^{source} = \mathbf{J}_{1,source}^{tan,norm}$  contient la source appliquée à l'interface  $m_s = 1$  et  $\mathbf{Y}_1^{induit} = \mathbf{J}_{1,induit}^{tan,norm}$  est la densité de courant électrique induite à cette même interface. Ici, la nécessité d'imposer  $\mathbf{Y}_{1i}^{induit} = \mathbf{J}_{1i,induit}^{tan,norm} = 0$  pour les éléments  $i$  correspondants à des positions incluses dans la source distribuée n'a aucune conséquence sur la réduction du système d'équations, qui comportera alors le même nombre d'inconnues que le système d'équations homogène de (2.128) :

$$\tilde{\mathbf{M}}_{Hred} \tilde{\mathbf{X}}_{red} = \tilde{\mathbf{B}}_{red} \quad (2.132)$$

### 2.10.3 Formulation générale de l'application d'une source «X» ou «Y»

La procédure suivante permet d'appliquer une source «X» ou «Y» pour le cas général :

1. Calculer l'excitation  $\tilde{\mathbf{B}}$  :

**Cas source «X» :**  $\tilde{\mathbf{B}} = -\tilde{\mathbf{M}}_H \tilde{\mathbf{X}}^{source}$ , où  $\tilde{\mathbf{X}}^{source}$  contient la source distribuée à l'interface désirée  $m_s$ ,

**Cas source «Y» :**  $\tilde{\mathbf{B}} = -\tilde{\mathbf{Y}}^{source}$ , où  $\tilde{\mathbf{Y}}^{source}$  contient la source distribuée à l'interface désirée  $m_s$ ,

2. Modifier le motif métallique à l'interface de source  $m_s$ ,

**Cas source de champ E tangentiel :** ajouter, s'il y a lieu, du métal là où se trouve la source distribuée de champ électrique tangentiel

**Cas source de courant J :** enlever, s'il y a lieu, du métal là où se trouve la source distribuée de densité de courant électrique

3. Réduire la matrice du système  $\tilde{\mathbf{M}}_H$  et le vecteur d'excitation  $\tilde{\mathbf{B}}$  en tenant compte du motif métallique modifié de façon à obtenir  $\tilde{\mathbf{M}}_{Hred'}$  et  $\tilde{\mathbf{B}}_{red'}$ .
4. Résoudre le système d'équations final :

$$\tilde{\mathbf{M}}_{Hred'} \tilde{\mathbf{X}}_{red'} = \tilde{\mathbf{B}}_{red'} \quad (2.133)$$

Nous disposons donc d'une procédure d'application de sources distribuées de champ électrique tangentiel et de densité surfacique de courant électrique. Nous verrons aux chapitres 3 et 4 comment il est possible d'adapter certaines sources physiques au modèle de source distribuée idéale que nous avons élaboré dans cette section.

## 2.11 Résolution du système d'équations par méthode itérative

### 2.11.1 Temps de calcul et espace mémoire nécessaires pour une décomposition LU

Pour résoudre le système d'équations (2.133), nous pourrions employer la technique classique de décomposition LU. Toutefois, le nombre élevé d'inconnues engendrés avec la méthode des lignes par la discrétisation surfacique des interfaces rend la quantité de mémoire et le temps de calcul prohibitifs avec l'emploi des méthodes classiques de résolution de systèmes d'équations linéaires.

Prenons un exemple pour bien illustrer l'enjeu. Les résultats montrés aux chapitres suivants nous indiquent que la convergence des résultats demande une discrétisation allant jusqu'à  $200 \times 200$  lignes. En considérant les deux systèmes de lignes décalés, ceci donne une grille de  $200 \times 200 \times 2 = 80\,000$  points. Si on suppose un motif métallique résultant en une réduction de 50% des points, nous aurons alors 40 000 in-



connues. La matrice du système d'équations devra donc être de taille  $40\,000 \times 40\,000$ , ce qui correspond à 1 600 000 000 valeurs complexes à placer en mémoire. Puisque chaque nombre complexe a une taille de 16 octets en double précision, la taille mémoire nécessaire pour conserver en mémoire la matrice du système d'équations est de :

$$\begin{aligned}
 N_{\text{octets}} &= 1\,600\,000\,000 \times 16 = 25\,600\,000\,000 \text{ octets} \\
 N_{\text{kilo-octets}} &= 25\,600\,000\,000 \text{ octets} \times \frac{1 \text{ Ko}}{1\,024 \text{ octets}} = 25\,000\,000 \text{ Ko} \\
 N_{\text{méga-octets}} &= 25\,000\,000 \text{ Ko} \times \frac{1 \text{ Mo}}{1\,024 \text{ Ko}} \approx 24\,414 \text{ Mo} \\
 N_{\text{giga-octets}} &\approx 24\,414 \text{ Mo} \times \frac{1 \text{ Go}}{1\,024 \text{ Mo}} \approx 23,8 \text{ Go}
 \end{aligned} \tag{2.134}$$

Ce nombre est une borne inférieure, puisqu'il ne tient pas compte de l'espace mémoire additionnel nécessaire aux opérations mathématiques. Puisque nous employons un ordinateur personnel disposant d'une mémoire vive de 192 Mo, on voit clairement qu'il n'est pas possible d'envisager de contenir la matrice du système d'équations en mémoire. D'autre part, même si nous disposions d'une mémoire vive de 24 Go, un ordinateur personnel cadencé à 200 Mhz comme celui que nous utilisons mettrait un temps beaucoup trop long à effectuer la décomposition LU. En effet, le temps de calcul nécessaire à la décomposition LU est proportionnel à  $N^3$ , où  $N$  est le nombre d'inconnues. Or, sachant que la décomposition LU d'une matrice de taille  $1000 \times 1000$  prend environ 1 minute sur un PC cadencé à 200 Mhz, on peut extrapoler le temps de calcul pour une matrice de taille  $40\,000 \times 40\,000$  :

$$\begin{aligned}
 T_{1\,000} &= kN^3 \Big|_{N=1\,000} = 1 \text{ min} \longrightarrow k = 1 \times 10^{-9} \text{ min} \\
 T_{40\,000} &= kN^3 \Big|_{N=40\,000} = 1 \times 10^{-9} \times (40\,000)^3 \text{ min} = 64\,000 \text{ min} \\
 &\approx 1\,067 \text{ heures} \approx 44,4 \text{ jours}
 \end{aligned} \tag{2.135}$$

Comme on peut le constater, le temps de calcul est lui aussi prohibitif. Il nous faut

donc une technique de résolution du système d'équations qui soit beaucoup plus rapide tout en utilisant beaucoup moins de mémoire.

### 2.11.2 Stockage de $\tilde{\mathbf{M}}_{Hred}$ sous forme compacte et calcul rapide du produit $\tilde{\mathbf{M}}_{Hred} \tilde{\mathbf{A}}_{red}$

Comme nous l'avons vu à l'équation (2.127), les sous-matrices de  $\tilde{\mathbf{M}}_H$  sont obtenues à partir des sous-matrices de  $\tilde{\tilde{\mathbf{M}}}_H$ , qui elles sont diagonales. L'information contenue dans la matrice  $\tilde{\mathbf{M}}_H$  est en fait entièrement contenue, sous forme transformée, dans la matrice  $\tilde{\tilde{\mathbf{M}}}_H$ . Cette information s'y trouve sous une forme très compacte puisque toutes les sous-matrices de  $\tilde{\tilde{\mathbf{M}}}_H$  sont diagonales. Il est possible de tirer profit de cette forme compacte lors du calcul du produit de la matrice  $\tilde{\mathbf{M}}_{Hred}$  avec un vecteur quelconque  $\mathbf{A}_{red}$ . Ce dernier pourrait s'effectuer sans que l'on n'ait à contenir la matrice  $\tilde{\mathbf{M}}_{Hred}$  (de très grande taille) en mémoire. La chaîne d'opérations suivante est ainsi équivalente au produit matriciel  $\tilde{\mathbf{C}}_{red} = \tilde{\mathbf{M}}_{Hred} \tilde{\mathbf{A}}_{red}$  :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\tilde{\mathbf{A}}} &\xleftarrow{\text{expansion}} \tilde{\mathbf{A}}_{red} \\
 \tilde{\tilde{\mathbf{A}}} &\leftarrow \tilde{\mathbf{T}}^{t*} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{T}} \\
 \tilde{\tilde{\mathbf{C}}} &\leftarrow \tilde{\tilde{\mathbf{M}}}_H \tilde{\tilde{\mathbf{A}}} \\
 \tilde{\mathbf{C}} &\leftarrow \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\tilde{\mathbf{C}}} \tilde{\mathbf{T}}^{t*} \\
 \tilde{\mathbf{C}}_{red} &\xleftarrow{\text{réduction}} \tilde{\mathbf{C}}
 \end{aligned} \tag{2.136}$$

L'opération de *réduction* d'un vecteur consiste à retirer les éléments du vecteur correspondant aux numéros de lignes retirées de la matrice  $\tilde{\mathbf{M}}_H$  pour obtenir  $\tilde{\mathbf{M}}_{Hred}$ . L'opération d'*expansion* d'un vecteur réduit est en quelque sorte l'inverse de la réduction. Elle consiste à insérer dans le vecteur des éléments nuls ( $\tilde{\mathbf{A}}_i = 0$ ) aux positions correspondant aux éléments retirés lors de la réduction. Un vecteur ayant subi une *expansion* puis une *réduction* demeure donc inchangé. Quant à  $\tilde{\mathbf{T}}$ , il s'agit simple-

ment d'une matrice formée de  $N_c + 1$  blocs identiques donnés par  $\check{\mathbf{T}}$  et placés sur la diagonale centrale.

L'étape centrale de la chaîne d'opérations (2.136) est composée du produit de  $\check{\mathbf{M}}_H \check{\mathbf{A}}$ , où  $\check{\mathbf{M}}_H$  est une matrice formée de sous-matrices diagonales pouvant être stockées dans un espace mémoire réduit par rapport à l'espace requis pour la matrice  $\tilde{\mathbf{M}}_H$ . Bien que la matrice  $\check{\mathbf{M}}_H$  comporte  $(N_c \times N_x \times N_z)^2$  éléments, l'espace requis pour le stockage des diagonales sera *au maximum* de  $N_c^2 \times N_x \times N_z$ . Il s'agit d'une valeur maximale, car selon le choix du vecteur d'inconnues tel que vu à la section 2.9, le taux de remplissage de la matrice  $\tilde{\mathbf{M}}_H$ , formée à partir de la matrice non pleine  $\tilde{\mathbf{M}}_E$ , peut varier ; l'expression donnée plus haut correspond au remplissage maximal de  $\tilde{\mathbf{M}}_H$ .

Les deuxième et quatrième étapes, elles, demandent l'utilisation de la matrice de transformation  $\check{\mathbf{T}}$ . Les blocs  $\check{\mathbf{T}}$  formant la diagonale de  $\check{\mathbf{T}}$  sont identiques, ce qui signifie que la matrice  $\check{\mathbf{T}}$  peut être stockée dans un espace mémoire de  $(N_x N_z)^2$  éléments. Ceci est néanmoins beaucoup trop élevé, comme nous l'avons vu plus haut. Voyons comment nous pourrions formuler la transformée  $\check{\mathbf{T}}$  afin d'éviter de la conserver en mémoire.

Rappelons la forme des blocs  $\check{\mathbf{T}}$  formant la diagonale de la matrice  $\check{\mathbf{T}}$  :

$$\check{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{T}}_{hn} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{T}}_{en} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{T}}_{en} \hat{\mathbf{S}}_\varphi & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{T}}_{en} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{T}}_{en} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{T}}_{en} \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{T}}_e} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}}_\varphi & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{I}} \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{S}}_\varphi} \quad (2.137)$$

où  $\hat{\mathbf{S}}_\varphi$  est donné par :

$$\hat{\mathbf{S}}_\varphi = \mathbf{S}_{\varphi z} \otimes \mathbf{S}_{\varphi z} \quad (2.138)$$

avec les expressions suivantes :

$$\mathbf{S}_{\varphi x} = \text{diag} \left( e^{j \frac{\pi(k-1)}{N_x}} \right), \quad \text{avec } k = 1, 2, \dots, N_x \quad (2.139)$$

$$\mathbf{S}_{\varphi z} = \text{diag} \left( e^{j \frac{\pi(k-1)}{N_z}} \right), \quad \text{avec } k = 1, 2, \dots, N_z \quad (2.140)$$

où  $\mathbf{S}_{\varphi x}$  et  $\mathbf{S}_{\varphi z}$  sont des matrices diagonales de taille  $N_x \times N_x$  et  $N_z \times N_z$ , respectivement. En employant la troisième forme de l'équation (2.137), il est possible de réécrire l'équation (2.127) en termes des matrices  $\check{\mathbf{T}}_e$  et  $\check{\mathbf{S}}_\varphi$  définies en (2.137) :

$$\tilde{\mathbf{M}}_H(i, k) = \check{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{M}}_H(i, k) \check{\mathbf{T}}^{t*} = \check{\mathbf{T}}_e \underbrace{\left( \check{\mathbf{S}}_\varphi \tilde{\mathbf{M}}_H(i, k) \check{\mathbf{S}}_\varphi^* \right)}_{\tilde{\mathbf{M}}_H'(i, k)} \check{\mathbf{T}}_e^{t*} \quad (2.141)$$

où l'on a défini une nouvelle matrice  $\tilde{\mathbf{M}}_H'$  pour pouvoir utiliser la transformation  $\check{\mathbf{T}}_e$  plutôt que  $\check{\mathbf{T}}$ .

Or, il se trouve que l'opération effectuée par chacune des deux matrices  $\hat{\mathbf{T}}_{en}$  à l'intérieur de  $\check{\mathbf{T}}_e$  est équivalente en tous points à la transformée de Fourier discrète bi-dimensionnelle inverse, tandis que l'opérateur  $\hat{\mathbf{T}}_{en}^{t*}$ , lui, effectue la transformée de Fourier discrète bi-dimensionnelle directe [12]. La définition de la transformée de Fourier discrète bi-dimensionnelle adoptée ici est la suivante :

$$\tilde{X}(k_x, k_z) = \frac{1}{\sqrt{N_x N_z}} \sum_{i_x=0}^{N_x-1} \sum_{i_z=0}^{N_z-1} x(i_x, i_z) e^{-j2\pi(k_x i_x / N_x + k_z i_z / N_z)}, \quad (2.142)$$

avec  $k_x = 0, 1, \dots, N_x - 1$  et  $k_z = 0, 1, \dots, N_z - 1$

$$x(i_x, i_z) = \frac{1}{\sqrt{N_x N_z}} \sum_{k_x=0}^{N_x-1} \sum_{k_z=0}^{N_z-1} \tilde{X}(k_x, k_z) e^{j2\pi(k_x i_x / N_x + k_z i_z / N_z)}, \quad (2.143)$$

avec  $i_x = 0, 1, \dots, N_x - 1$  et  $i_z = 0, 1, \dots, N_z - 1$

où  $x$  et  $\tilde{X}$  sont les séquences de points dans les domaines spatial et spectral, respecti-

vement. En employant l'algorithme bien connu de la transformée de Fourier rapide<sup>4</sup>, il n'est plus nécessaire de contenir en mémoire la matrice  $\check{\mathbf{T}}_e$  et le temps de calcul du produit de  $\check{\mathbf{T}}_e \tilde{\mathbf{A}}$  passe d'un ordre  $N_x^2 N_z^2$  à  $N_x N_z \log(N_x N_z)$ .

Prenons l'exemple d'une structure comportant deux interfaces sur lesquels on a un motif métallique. Dans ce cas, la procédure (2.136) peut s'écrire, en séparant les variables reliées aux interfaces 1 et 2 :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{red'}(1) \\ \tilde{\mathbf{C}}_{red'}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \check{\mathbf{T}}_e \tilde{\mathbf{M}}'_H(1, 1) \check{\mathbf{T}}_e^{t*} \right)_{red_{11}} & \left( \check{\mathbf{T}}_e \tilde{\mathbf{M}}'_H(1, 2) \check{\mathbf{T}}_e^{t*} \right)_{red_{12}} \\ \left( \check{\mathbf{T}}_e \tilde{\mathbf{M}}'_H(2, 1) \check{\mathbf{T}}_e^{t*} \right)_{red_{21}} & \left( \check{\mathbf{T}}_e \tilde{\mathbf{M}}'_H(2, 2) \check{\mathbf{T}}_e^{t*} \right)_{red_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{red'}(1) \\ \tilde{\mathbf{A}}_{red'}(2) \end{bmatrix} \quad (2.144)$$

où l'opérateur global Réduction () est réparti en quatre opérateurs de réduction  $red_{11}$ ,  $red_{12}$ ,  $red_{21}$ ,  $red_{22}$  associés aux motifs métalliques des interfaces 1 et 2. Dans l'expression  $red_{mn}$ , l'indice  $m$  fait référence à la réduction effectuée sur les lignes de la sous-matrice et l'indice  $n$  fait référence à la réduction effectuée sur les colonnes de la sous-matrice. En accord avec les développements faits plus haut, chacun des quatre sous-produits matriciels peut être remplacé par l'opération suivante :

$$\begin{aligned} & \left( \check{\mathbf{T}}_e \tilde{\mathbf{M}}'_H(m, n) \check{\mathbf{T}}_e^{t*} \right)_{red_{mn}} \tilde{\mathbf{A}}_{red'}(n) \\ &= \text{Réduction}_m \left( \text{ITFR2D} \left( \tilde{\mathbf{M}}'_H(m, n) \text{TFR2D} \left( \text{Expansion}_n \left( \tilde{\mathbf{A}}_{red'}(n) \right) \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (2.145)$$

où les fonctions TFR2D () et ITFR2D () représentent la transformée rapide de Fourier à deux dimensions directe et inverse, respectivement. Les opérateurs Réduction<sub>m</sub> () et Expansion<sub>n</sub> () font référence à la réduction et à l'expansion en fonction des motifs métalliques des interfaces  $m$  et  $n$ , respectivement. L'emploi de la formule compacte

<sup>4</sup>mieux connu sous l'acronyme *FFT*, de l'anglais *Fast Fourier Transform*

donnée par (2.145) permet d'accélérer le calcul du sous-produit matriciel à condition que les opérations de réduction et d'expansion ne soit pas trop prononcées. Ainsi, si l'interface 1 comporte une petite fente pratiquée dans un plan de masse couvrant toute la cellule, il devient plus rentable de construire la sous-matrice pleine que d'utiliser l'opération (2.145). La règle ayant été utilisée dans le cadre de ce travail consiste à construire et conserver en mémoire la sous-matrice pleine réduite  $\left( \tilde{\mathbf{T}}_e \tilde{\mathbf{M}}'_H(m, n) \tilde{\mathbf{T}}_e^{t*} \right)_{redmn}$  lorsque la taille mémoire requise pour son stockage est inférieure à la taille mémoire requise pour conserver la diagonale de la sous-matrice transformée  $\tilde{\mathbf{M}}'_H(m, n)$ .

En employant la formule (2.145) pour les sous-matrices suffisamment grandes, le temps de calcul est grandement réduit et l'opérateur  $\tilde{\mathbf{M}}_{Hred'}$  peut être conservé sous la forme la plus compacte possible.

### 2.11.3 Résolution du système d'équations par méthode itérative

Puisqu'on veut éviter de conserver en mémoire la matrice  $\tilde{\mathbf{M}}_{Hred'}$ , il devient impossible d'effectuer la décomposition LU car cette dernière implique une série d'opérations directes sur le contenu des éléments de la matrice à factoriser. Nous tenterons donc de résoudre le système d'équations par méthode itérative. On cherche à réduire au minimum le résidu de l'équation suivante :

$$\mathbf{R}_n = \tilde{\mathbf{M}}_{Hred'} \tilde{\mathbf{X}}_{red'}^{estimé} - \tilde{\mathbf{B}}_{red'} \quad (2.146)$$

où  $\tilde{\mathbf{X}}_{red'}^{estimé}$  est un estimé de la solution. L'estimé idéal rendrait le résidu  $\mathbf{R}_n$  égal à zéro.

Il existe plusieurs méthodes itératives de résolution de systèmes d'équations permettant d'obtenir un bon estimé de (2.146). La plus connue est la méthode des gradients conjugués [21]. Toutefois, cette dernière exige de  $\tilde{\mathbf{M}}_{Hred'}$  qu'elle soit une matrice hermitienne définie positive. Or, la matrice  $\tilde{\mathbf{M}}_{Hred'}$  n'est pas hermi-

tienne<sup>5</sup>. Nous nous tournerons donc vers une autre méthode dérivée de la méthode des gradients conjugués, la *méthode modifiée des gradients au carré biconjugués avec stabilisation*, désignée sous l'acronyme Bi-CGSTAB2<sup>6</sup>. Celle-ci est disponible à l'intérieur de la librairie fortran PCG [11]; elle est du domaine public et est disponible gratuitement avec la documentation sur l'Internet à partir du site FTP <ftp://ftp.netlib.org/linalg/pcg.tgz> ou à partir du site Web de Netlib <http://www.netlib.org/linalg/pcg.tgz>. Cette méthode est valide pour une matrice générale sans propriétés particulières. La librairie PCG comporte d'autres méthodes de résolution de systèmes d'équations, mais par expérience la méthode Bi-CGSTAB2 est celle qui donne les meilleurs résultats pour le plus grand nombre de cas considérés ici, tout en demandant un espace mémoire raisonnable; l'espace mémoire demandé pour un système d'équations à  $N$  inconnues est au maximum de  $29N + 50$  éléments complexes à double précision. Par comparaison, l'espace nécessaire pour un système d'équations de 40 000 inconnues est de 17,7 *Mo*, alors que nous avons calculé plus haut une taille mémoire nécessaire de 23,8 *Go* pour contenir la matrice complète; c'est une réduction de près de 1400 pour 1 qui rend le calcul viable sur un ordinateur personnel.

Chacune des itérations des algorithmes de résolution itérative de la librairie PCG demande l'évaluation du produit de la matrice  $\tilde{\mathbf{M}}_{Hred}$  par un vecteur. Le calcul de ce produit, qui doit être effectué de nombreuses fois au cours de la résolution itérative, est effectué au moyen de l'algorithme décrit à la section 2.11.2. Cet algorithme spécialisé est introduit à l'intérieur des itérations des routines de la librairie PCG au moyen du mode de communication inversée (*reverse communication level*) expliqué dans [11]. Ainsi, il n'est pas nécessaire de connaître le fonctionnement interne de l'algorithme de résolution itérative pour l'utiliser avec la fonction spécialisée de produit matriciel développée en 2.11.2. La combinaison de l'utilisation de l'algorithme de ré-

---

<sup>5</sup>Une matrice complexe  $\mathbf{A}$  est hermitienne si  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{t*}$

<sup>6</sup>de l'anglais *modified BIConjugate Gradient Squared method with STABilization* [11]

solution itérative et de la transformée rapide de Fourier est similaire à une technique connue sous le nom de CGFFT <sup>7</sup>. Elle en diffère seulement par le type d'algorithme utilisé pour la résolution itérative (Bi-CGSTAB2 au lieu de CGFFT).

L'utilisation d'un opérateur de pré-conditionnement permet en général d'accélérer la convergence des processus de résolution itérative. Le seul opérateur qui puisse être envisagé dans le cas où l'on ne dispose pas de la matrice pleine est celui qui consiste à mettre à l'échelle toutes les lignes du système d'équations de sorte que tous les éléments de la diagonale du système aient la même valeur. Or, il s'avère que la matrice du système d'équations construite ici est circulante selon deux ordres : elle contient des blocs circulants <sup>8</sup> au premier ordre et les blocs sont circulants entre eux. Ces propriétés font que tous les éléments de la matrice du système d'équations ont une valeur identique, ce qui rend inutile l'utilisation de l'opérateur de pré-conditionnement mentionné ci-haut.

### 2.11.3.1 Critère de convergence de la solution itérative

On définit le résidu normalisé de l'équation (2.146) obtenu à l'itération  $n$  comme suit :

$$RN_n = \frac{\|\mathbf{R}_n\|}{\|\tilde{\mathbf{B}}_{red}\|} \quad (2.147)$$

Tout le long du processus itératif de résolution, ce résidu normalisé est évalué. La méthode Bi-CGSTAB2 ne garantit pas une décroissance uniforme du résidu normalisé  $RN_n$  au cours du processus itératif. Cependant, dans tous les cas considérés, le résidu  $RN_n$  tend en général à diminuer, mais présente des variations locales durant lesquelles il augmente. Un des critères de convergence employés pour décider de l'arrêt du

---

<sup>7</sup> *Conjugate Gradient Fast Fourier Transform* [5]

<sup>8</sup> Dans une matrice circulante, chacune des lignes est formée par la rotation vers la droite de la ligne précédente



processus itératif consiste à fixer un seuil pour  $RN_n$  sous lequel on considère que la solution estimée  $\tilde{\mathbf{X}}_{red'}^{estimé}$  est valable.

Les simulations effectuées permettent de constater que ce critère de convergence est difficile à fixer. En effet, le seuil que l'on doit fixer pour obtenir une valeur juste d'un paramètre macroscopique calculé à partir de la solution  $\tilde{\mathbf{X}}_{red'}^{estimé}$  dépend d'une foule de facteurs difficiles à contrôler ; les paramètres macroscopiques calculés sont par exemple l'impédance d'entrée dans le cas d'une antenne ou le coefficient de réflexion d'une onde incidente dans le cas d'une surface à sélection de fréquences. Pour remédier à cette difficulté, deux critères de convergence peuvent être employés :

1. *Critère qualitatif* : en observant l'allure des courbes d'un paramètre macroscopique en fonction de l'angle de balayage ou de la fréquence d'opération, on juge de la convergence par le niveau de bruit présent sur la courbe ; le niveau de bruit diminue à mesure que la valeur du niveau de convergence  $RN_n$  diminue. Il suffit donc de réduire le seuil de convergence fixé pour  $RN_n$  jusqu'à ce que les courbes macroscopiques deviennent lisses.
2. *Critère quantitatif automatisé* : dans ce cas, nous utiliserons plutôt un critère de convergence combinant le résidu normalisé  $RN_n$  et la convergence du paramètre macroscopique  $P$  auquel on s'intéresse. Ainsi, on évaluera la valeur estimée du paramètre  $P$  pour des valeurs décroissantes du résidu normalisé  $RN_n$ . On constatera la convergence de  $P$  lorsque sa valeur demeurera stable durant  $N_{conv}$  évaluations de  $P$ .

Le premier critère est assez simple d'utilisation. Nous décrirons, dans ce qui suit, l'algorithme de recherche de convergence du second critère. Définissons d'abord les paramètres suivants :

- $RNC$  est le résidu normalisé cible. La prochaine évaluation du paramètre  $P$  est effectuée lorsque le résidu normalisé passe sous le seuil défini par  $RNC$  ;
- $\nu$  est un facteur servant à déterminer la prochaine valeur cible du résidu nor-

malisé  $RNC$  sous laquelle on calculera la valeur du paramètre macroscopique  $P$ . La valeur de  $\nu$  doit être située entre 0 et 1 ;

- $\xi$  est l'erreur relative maximale permise pour le paramètre macroscopique  $P$  pour qu'il soit réputé stable. La valeur de  $\xi$  est située entre 0 et 1 ;
- $N_{conv}$  est un nombre entier spécifiant le nombre de valeurs successives stables de  $P$  nécessaire pour qu'on considère que la convergence est atteinte. La valeur de  $N_{conv}$  doit être supérieure ou égale à 1 ;
- $n$  est un compteur représentant le nombre de mesures successives stables de  $P$ , c'est-à-dire le nombre de mesures de  $P$  variant à l'intérieur de l'erreur relative maximale  $\xi$ .

Alors l'algorithme suivant permettra de déterminer le critère d'arrêt du processus itératif :

1. ÉVALUER le paramètre macroscopique  $P$  à partir de l'estimé initial
2.  $P_0 \leftarrow P$
3. ÉVALUER le résidu normalisé initial  $RN_0$
4. INITIALISER l'indice  $i$  :  $i \leftarrow 0$
5. INITIALISER le compteur  $n$  :  $n \leftarrow 0$
6. TANT QUE  $n < N_{conv}$  (*tant que la convergence n'est pas atteinte*),
  - (a) FIXER le résidu normalisé cible :  $RNC \leftarrow \nu \times RN_i$
  - (b) TANT QUE  $RN_i > RNC$  (*tant que le résidu normalisé cible n'est pas atteint*),
    - i. Incréments la valeur de l'indice  $i$  :  $i \leftarrow i + 1$
    - ii. ÉVALUER le résidu normalisé  $RN_i$
  - (c) ÉVALUER le paramètre macroscopique  $P$
  - (d) SI  $\frac{|P - P_0|}{|P_0|} < \xi$  (*si le paramètre macroscopique est stable*) ALORS  
Incrémenter le compteur  $n$  :  $n \leftarrow n + 1$

## SINON

Ré-initialiser le compteur  $n$  :  $n \leftarrow 0$

(e)  $P_0 \leftarrow P$

Ainsi, le processus prend fin lorsque pour  $N_{conv}$  valeurs successives et décroissantes selon le facteur  $\nu$  du résidu normalisé, le paramètre  $P$  n'a pas varié au delà de l'erreur relative maximale  $\xi$ . Pour les fins des simulations dont les résultats sont présentés aux chapitres suivants, les paramètres de convergence employés sont  $\nu = 0,5$ ,  $\xi = 0,001$  et  $N_{conv} = 3$ .

Dans cette section, nous avons développé une technique utilisant l'algorithme Bi-CGSTAB2 combiné à la transformée de Fourier rapide pour résoudre le système d'équations linéaires (2.133). Cette technique permet de réduire la taille mémoire nécessaire d'un ordre  $(N_x N_z)^2$  à un ordre  $N_x N_z$ . De plus, la technique réduit le temps de calcul pour la résolution de façon considérable, rendant possible la résolution de systèmes d'équations de plusieurs dizaines de milliers d'inconnues en des temps raisonnables. À la connaissance de l'auteur, l'utilisation cette technique de résolution employée avec la méthode des lignes est originale. Les temps de calculs pour diverses simulations seront donnés aux chapitres 3 et 4.

### 2.12 Positionnement des lignes aux extrémités métalliques

Tel qu'expliqué dans [19], le problème de *convergence relative* relié à la violation de la condition de rayonnement<sup>9</sup> près des bords métallique et que l'on retrouve avec la méthode des moments n'est pas rencontré avec la méthode des lignes. Ainsi, la méthode convergera toujours vers les bonnes valeurs.

Par contre, la rapidité de convergence, elle, dépend fortement de la discrétisation des motifs métalliques aux interfaces de la structure multicouche. La figure 2.1 illustre un exemple de discrétisation de deux motifs métalliques : une plaque mé-

---

<sup>9</sup>de l'anglais *edge condition*

tallique et une fente dans un plan de masse. Le positionnement par rapport aux bords métalliques des lignes  $l_{ex}$ ,  $l_{ez}$ ,  $l_{hx}$  et  $l_{hz}$  telles que définies à la section 2.2 est effectué selon l'approche présentée dans [19]. Dans le cas présent d'une discrétisation bi-dimensionnelle, le choix optimal des paramètres  $p_x$  et  $p_z$  illustrés à la figure 2.1 dépend de la topologie considérée et n'est pas prédictible. C'est pourquoi nous prendrons  $p = p_x = p_z = 0,25$ , soit le paramètre optimal connu [19] utilisé pour les structures discrétisées dans une seule dimension, par exemple des structures de guides d'ondes. Ce choix non optimal aura pour conséquence une convergence non optimale. Toutefois, les résultats obtenus à la convergence seront parfaitement valides, tel qu'expliqué plus haut.

Le respect d'une valeur de paramètre de bord fixe  $p_{x,z}$  garantit une convergence monotone des résultats en fonction des intervalles  $\Delta_x$  et  $\Delta_z$  entre les lignes, ce qui peut être intéressant si l'on désire prédire la valeur réelle d'un résultat par extrapolation d'une série non convergée de résultats à plusieurs niveaux de discrétisation. Les efforts visant à conserver une valeur de  $p_{x,z}$  constante d'un niveau de discrétisation à l'autre ont pour but d'obtenir une convergence monotone, plus facile à observer. La valeur utilisée (0,25) est choisie arbitrairement. Il serait pertinent de tenter d'obtenir une valeur optimale pour accélérer la convergence, mais ce travail d'optimisation ne sera pas effectué dans le cadre du présent projet.

Dans le cas d'une structure ouverte où les conditions aux frontières latérales sont approchées par des murs électriques, magnétiques ou des conditions absorbantes numériques, il est facile de toujours conserver la même valeur de  $p$  quels que soit les nombres de lignes  $N_x$  et  $N_z$ , puisqu'on peut toujours ajuster la distance entre les murs latéraux qui ne représentent pas de structures physiques réelles. Par contre, dans le cas qui nous concerne, la taille de la cellule, c'est-à-dire l'espace entre les éléments du réseau, est un paramètre physique fixe qui ne peut être modifié sans changer la nature du problème analysé. Il est par conséquent impossible, pour une taille de cellule  $L_x, L_z$  et des dimensions fixes de motifs métalliques aux interfaces, de respecter

la valeur du paramètre de bord  $p$  quels que soient les niveaux de discrétisation  $N_x$  et  $N_z$ .

Il faudra donc s'attendre à des courbes de convergence non monotones puisque, en général, chacun des points de la courbe pourra correspondre à une valeur différente de  $p$ . Autrement dit, pour chaque niveau de discrétisation, les tailles effectives des motifs métalliques seront différentes des tailles physiques désirées. Néanmoins, cet effet s'atténuera avec l'augmentation de  $N_x$  et  $N_z$  et il y aura tout de même convergence des résultats, mais cette convergence sera non monotone. Ces attentes sont confirmées à la lecture des figures des chapitres 3 et 4. Au chapitre 3, la valeur de  $p$  utilisée est constante d'un niveau de discrétisation à l'autre, ce qui donne lieu à une convergence monotone des courbes tracées. Par contre, au chapitre 4, la valeur de  $p$  fluctue d'un niveau de discrétisation à l'autre, ce qui se reflète en une convergence oscillante des courbes obtenues.

### **2.12.1 Dimensions effectives des formes métalliques**

En général, les dimensions effectives des formes métalliques seront différentes des dimensions physiques spécifiées. Il peut toutefois être utile de pouvoir calculer les dimensions effectives d'une forme métallique à partir d'une discrétisation donnée. Nous développerons ici les formules de calcul de tailles effectives pour des rubans et des plaques rectangulaires métalliques, de même que pour des fentes rectangulaires pratiquées dans un plan de masse.

#### **2.12.1.1 Dimensions et position effectives d'un ruban ou d'une plaque rectangulaire métallique**

Nous définirons les dimensions effectives comme étant égales aux dimensions permettant de respecter exactement le paramètre de bord  $p$  pré-défini. En consultant la figure 2.1, il est clair que la taille effective selon  $x$  d'une plaque rectangulaire métallique (ou la largeur d'un ruban métallique aligné selon l'axe des  $z$ ) et la taille effective

selon  $z$  d'une plaque rectangulaire métallique (ou la largeur d'un ruban métallique aligné selon l'axe des  $x$ ) sont données par :

$$L_x^{plaque\ eff} = \begin{cases} 0, & N_{lex}^m = 0 \\ (N_{lex}^m - 1 + 2p) \times \frac{L_x}{N_x}, & 0 < N_{lex}^m < N_x \\ L_x, & N_{lex}^m = N_x \end{cases} \quad (2.148)$$

$$L_z^{plaque\ eff} = \begin{cases} 0, & N_{lhz}^m = 0 \\ (N_{lhz}^m - 1 + 2p) \times \frac{L_z}{N_z}, & 0 < N_{lhz}^m < N_z \\ L_z, & N_{lhz}^m = N_z \end{cases} \quad (2.149)$$

où  $N_{lex}^m$  est le nombre de lignes  $l_{ex}$  passant par le métal selon la direction  $x$  et  $N_{lhz}^m$  est le nombre de lignes  $l_{hz}$  passant par le métal selon la direction  $z$ .

Pour certaines combinaisons des paramètres  $L_{x,z}$ ,  $N_{x,z}$  et  $L_{x,z}^{plaque}$  (la taille désirée), il existe des valeurs entières de  $N_{lex,lhz}^m$  qui font que  $L_{x,z}^{plaque\ eff} = L_{x,z}^{plaque}$ . Cependant, en général ce n'est pas le cas et il faut choisir des valeurs de  $N_{lex}^m$  et  $N_{lhz}^m$  qui réduisent au minimum l'écart entre les dimensions voulues et les dimensions effectives :

$$N_{lex}^m = \text{Arrondi} \left( \frac{L_x^{plaque}}{L_x} N_x + 1 - 2p \right) \quad (2.150)$$

$$N_{lhz}^m = \text{Arrondi} \left( \frac{L_z^{plaque}}{L_z} N_z + 1 - 2p \right) \quad (2.151)$$

D'autre part, la position effective d'une plaque peut différer de la position désirée et ce, même si la taille effective est égale à la taille désirée. Prenons l'exemple d'une plaque devant être centrée dans la cellule. Dans ce cas,  $N_{lex}^m$  et  $N_x$  doivent être de parité différente tandis  $N_{lhz}^m$  et  $N_z$  doivent avoir la même parité pour que la plaque puisse effectivement être centrée selon  $x$  et  $z$ .

### 2.12.1.2 Dimensions et position effective d'une fente rectangulaire dans un plan de masse

Dans le cas d'une fente, les dimensions effectives sont :

$$L_x^{fente\ eff} = \begin{cases} 0, & N_{l_{ex}}^f = 0 \\ (N_{l_{ex}}^f + 1 - 2p) \times \frac{L_x}{N_x}, & 0 < N_{l_{ex}}^f < N_x \\ L_x, & N_{l_{ex}}^f = N_x \end{cases} \quad (2.152)$$

$$L_z^{fente\ eff} = \begin{cases} 0, & N_{l_{hz}}^f = 0 \\ (N_{l_{hz}}^f + 1 - 2p) \times \frac{L_z}{N_z}, & 0 < N_{l_{hz}}^f < N_z \\ L_z, & N_{l_{hz}}^f = N_z \end{cases} \quad (2.153)$$

où  $N_{l_{ex}}^f$  est le nombre de lignes  $l_{ex}$  passant par la fente selon la direction  $x$  et  $N_{l_{hz}}^f$  est le nombre de lignes  $l_{hz}$  passant par la fente selon la direction  $z$ .

Les valeurs de  $N_{l_{ex}}^f$  et  $N_{l_{hz}}^f$  qui réduisent au minimum l'écart entre les dimensions voulues et les dimensions effectives sont :

$$N_{l_{ex}}^f = Arrondi \left( \frac{L_x^{fente}}{L_x} N_x - 1 + 2p \right) \quad (2.154)$$

$$N_{l_{hz}}^f = Arrondi \left( \frac{L_z^{fente}}{L_z} N_z - 1 + 2p \right) \quad (2.155)$$

où  $L_x^{fente}$  et  $L_z^{fente}$  sont les dimensions désirées de la fente.

En ce qui a trait à la position de la fente, le problème est semblable au cas de la plaque métallique. Dans le cas d'une fente centrée dans la cellule,  $N_{l_{ex}}^f$  et  $N_x$  doivent être de parité différente tandis que  $N_{l_{hz}}^f$  et  $N_z$  doivent avoir la même parité pour qu'il soit possible de centrer la fente discrétisée selon  $x$  et  $z$ .

### 2.13 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons défini la formulation de base permettant de modéliser une structure périodique multicouche, quelle que soit la forme de la source. Une technique permettant le réarrangement du système d'équations en fonction du type des inconnues choisis pour chacune des interfaces a été développée et un protocole a été établi pour permettre l'application d'une source distribuée de champ électrique tangentiel ou de densité surfacique de courant électrique sur n'importe laquelle des interfaces de la structure. Finalement, nous avons présenté une nouvelle approche pour le calcul de la solution du système d'équations basée sur une méthode itérative de résolution (*Bi-CGSTAB2*) et la transformée rapide de Fourier. Cette approche résulte en des économies de mémoire et de temps de calcul considérables.



## CHAPITRE 3

### ANALYSE DE SURFACES À SÉLECTION DE FRÉQUENCES

Le chapitre précédent nous a permis de développer un outil général d'analyse de structures périodiques multicouches. Dans ce chapitre, nous utiliserons cet outil pour exciter une SSF telle que décrite en 1.2 avec une onde plane incidente et mesurer sa réponse, sous forme de coefficients de réflexion et de transmission de l'onde incidente. Une comparaison des résultats obtenus avec des publications antérieures permettra ensuite d'effectuer une validation du noyau général de la méthode décrite au chapitre 2.

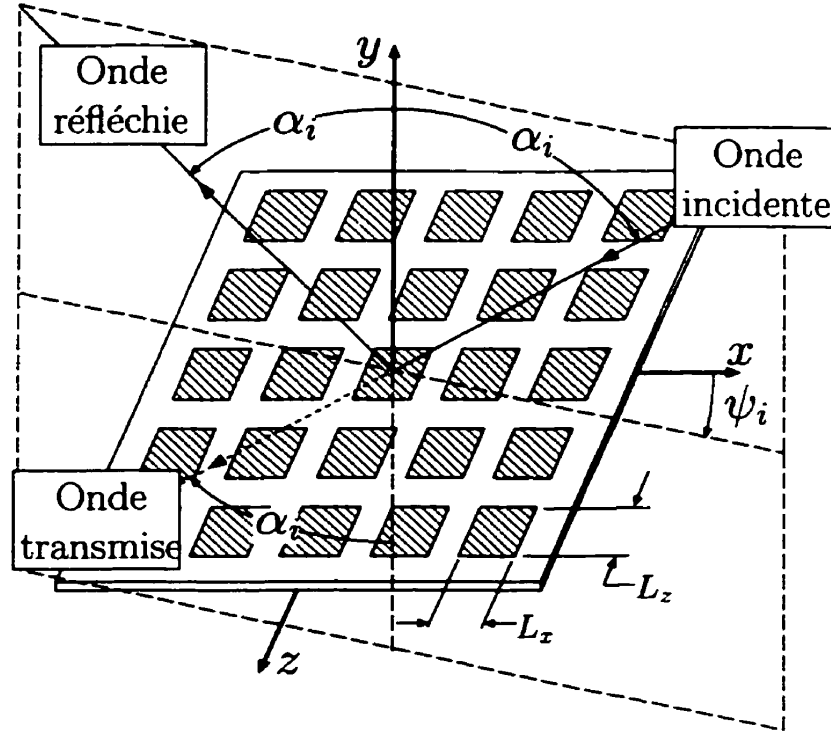
#### 3.1 Définition des plans d'incidence

Nous définirons ici les paramètres concernant l'onde plane incidente sur la structure. La figure 3.1 présente les coordonnées spécifiant la direction de l'onde incidente. L'angle  $\psi_i$  représente l'angle entre le plan d'incidence de l'onde et l'axe des  $x$ . L'angle  $\alpha_i$  représente l'angle entre la direction de propagation de l'onde et la normale à la surface de la structure. Dans le plan d'incidence deux modes d'excitation sont possibles : les modes  $TE$  et  $TM$ . Ici, la notation  $TE$  signifie que le champ électrique est tangent au plan d'incidence de l'onde, tandis que la notation  $TM$  dénote une onde dont le champ magnétique est tangent à son plan d'incidence<sup>1</sup>. Ces deux modes sont illustrés à la figure 3.2.

Les deux prochaines sections définissent l'application des sources d'ondes planes incidentes  $TE$  et  $TM$  de façon à permettre l'excitation du système d'équations homogène défini au chapitre 2.

---

<sup>1</sup>Le mode  $TM$  est aussi connu sous les noms "polarisation perpendiculaire", "polarisation horizontale" ou "polarisation E". Le mode  $TE$ , lui, est noté alternativement "polarisation parallèle", "polarisation verticale" ou "polarisation H". Voir la référence [1]



**Figure 3.1:** Système de coordonnées sphériques utilisé pour la direction des onde incidentes, réfléchie et transmise

### 3.2 Formulation de la source à polarisation $TE$

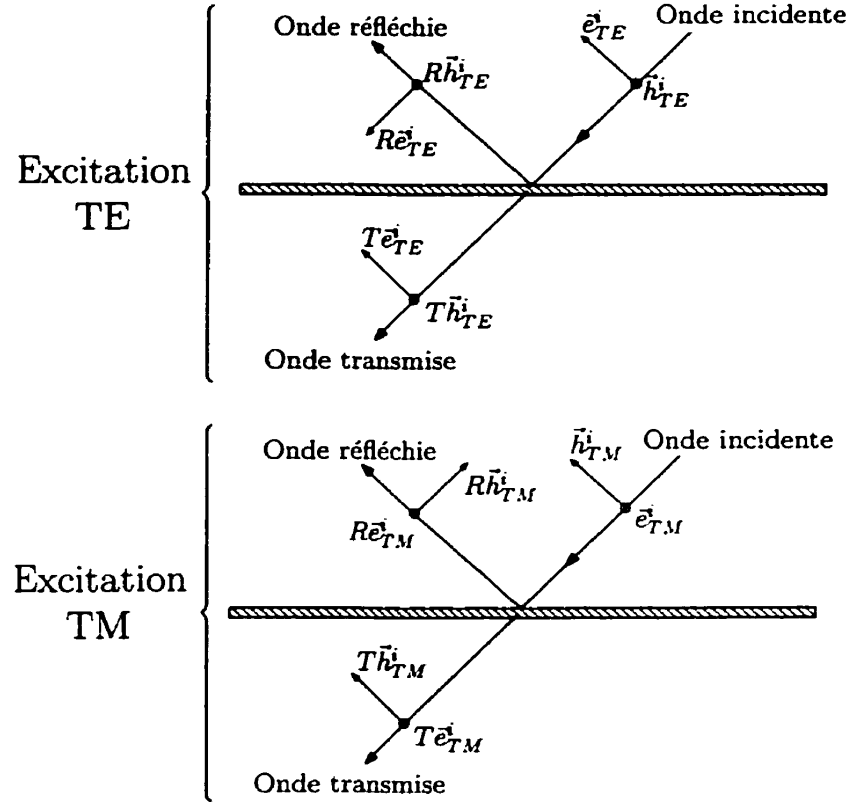
Dans cette section, nous formulerons l'application d'une source formée d'une onde plane incidente à polarisation  $TE$ .

#### 3.2.1 Forme analytique

En utilisant le système de coordonnées décrit plus haut, les champs électromagnétiques d'une onde plane incidente dans le cas de l'excitation  $TE$  peuvent s'écrire :

$$\vec{e}_{TE}^i(x, y, z) = E_0 e^{-j(k_{x0}x + k_{y0}y + k_{z0}z)} (-\hat{x} \cos \alpha^i \cos \psi^i + \hat{y} \sin \alpha^i - \hat{z} \cos \alpha^i \sin \psi^i) \quad (3.1)$$

$$\vec{h}_{TE}^i(x, y, z) = \frac{\sqrt{\epsilon_r^{(N_c+1)}}}{\eta_0} E_0 e^{-j(k_{x0}x + k_{y0}y + k_{z0}z)} (\hat{x} \sin \psi^i - \hat{z} \cos \psi^i) \quad (3.2)$$



**Figure 3.2:** Modes d'excitation  $TE$  et  $TM$  dans le plan d'incidence de l'onde

où les constantes de propagation s'expriment en fonction des angles donnant la direction de propagation de l'onde plane incidente :

$$k_{x0} = -\sqrt{\epsilon_r^{(N_c+1)}} k_0 \sin \alpha^i \cos \psi^i \quad (3.3)$$

$$k_{yi} = -\sqrt{\epsilon_r^{(N_c+1)}} k_0 \cos \alpha^i \quad (3.4)$$

$$k_{z0} = -\sqrt{\epsilon_r^{(N_c+1)}} k_0 \sin \alpha^i \sin \psi^i \quad (3.5)$$

avec  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ . La constante  $\epsilon_r^{(N_c+1)}$  est la permittivité de l'espace libre, qui est généralement le vide ( $\epsilon_r^{(N_c+1)} = 1$ ).

En vertu du théorème de Floquet [17], les champs électromagnétiques diffractés au-dessus et en dessous de la structure périodique multicouche peuvent s'exprimer

sous forme d'une superposition d'un spectre discret d'ondes planes :

$$\Psi^s(x, y, z) = \sum_{i_x=-\infty}^{\infty} \sum_{i_z=-\infty}^{\infty} A_{i_x i_z} e^{-j(k_{x0}x + k_{z0}z - 2\pi(\frac{i_x}{L_x}x + \frac{i_z}{L_z}z) + k_{ys}y)} \quad (3.6)$$

$$\text{avec } k_{ys}^2 = \epsilon_r^{(N_c+1)} k_0^2 - \left(k_{x0} - \frac{2\pi i}{L_x}\right)^2 - \left(k_{z0} - \frac{2\pi i}{L_z}\right)^2 \quad (3.7)$$

$$\text{et } \Re(k_{ys}) \geq 0, \quad \Im(k_{ys}) \leq 0$$

où  $\Psi^s$  représente n'importe laquelle des composantes des champs électromagnétiques diffractés.  $L_x$  et  $L_z$  sont les dimensions de la cellule, c'est-à-dire les distances entre les éléments du réseau périodique selon les directions  $x$  et  $z$ . Pour chaque direction d'incidence  $\psi_i, \alpha_i$ , il existe des dimensions  $L_x$  et  $L_z$  suffisamment petites pour que seule la composante spectrale fondamentale ( $i = 0, k = 0$ ) produise une valeur réelle de  $k_{ys}$ , toutes les autres composantes produisant des valeurs purement imaginaires pour  $k_{ys}$ . Cette condition correspond aux cas où aucun lobe discordant<sup>2</sup> de la structure périodique n'est excité. Autrement dit, seule la fréquence spatiale fondamentale se propage jusqu'en champ éloigné ; les autres composantes s'atténuent et ne sont donc présentes qu'en champ proche. On fera référence à cette condition sous le nom *condition de réflexion spéculaire*. Pour les cas respectant cette condition, toute l'énergie du champ incident est répartie entre le champ réfléchi, le champ transmis et l'énergie dissipée par la structure (voir figure 1.2). Dans les plans d'incidence  $\psi_i = 0^\circ$  et  $\psi_i = 90^\circ$ , cette condition est respectée pour toutes valeurs de  $\alpha^i$  si  $L_x \leq 0.5\lambda_0/\sqrt{\epsilon_r}$  et  $L_z \leq 0.5\lambda_0/\sqrt{\epsilon_r}$ , où  $\epsilon_r$  est la permittivité de l'espace libre.

Dans ce chapitre, on ne s'intéressera qu'à des cas respectant la *condition de réflexion spéculaire*, car en général les configurations utiles de surfaces à sélection de fréquences doivent la respecter. Sachant que le champ éloigné de la structure est composé d'une onde plane incidente et d'une onde plane réfléchie lorsque cette condition est respectée, on peut formuler l'excitation de la structure sous forme d'une

---

<sup>2</sup> Aussi connus sous le nom de lobes de grating

source idéale de champ électrique tangentiel distribué. Cette forme est obligatoire étant donné que nous n'avons défini, à la section 2.10, que des source idéales ; il n'est pas possible d'exciter la structure directement à partir d'une onde incidente sans définir une nouvelle forme de condition aux frontières à l'interface supérieure.

Pour parvenir à formuler l'excitation sous forme d'une source idéale, on n'a qu'à ajouter, au-dessus de la structure étudiée, une couche de permittivité égale à celle de l'espace libre ( $\epsilon_r^{N_c} = \epsilon_r^{(N_c+1)}$ ) d'une épaisseur suffisante pour que les modes évanescents soient à toutes fins pratiques nuls à l'interface supérieure du substrat en question. En pratique, on choisit une distance égale à 10 fois la longueur d'onde dans l'espace libre de la plus basse fréquence analysée ; cette distance a été choisie après une simple analyse montrant une convergence des résultats lorsque la distance avoisinait la longueur d'onde. Les champs électromagnétiques tangentiels à cette interface ne seront donc composés que d'une onde incidente et d'une onde réfléchie, en tous points analogues aux champs électromagnétiques dans une ligne de transmission idéale. Dans le cas  $TE$ , les champs tangentiels sont, à cette interface :

$$\tilde{e}_{tan}(x, z) = \underbrace{(1 + R) E'_0}_{e_{tan}^0} e^{-j(k_{x0}x + k_{z0}z)} (-\hat{x} \cos \alpha^i \cos \psi^i - \hat{z} \cos \alpha^i \sin \psi^i) \quad (3.8)$$

$$\tilde{h}_{tan}(x, z) = \underbrace{(1 - R) \frac{\sqrt{\epsilon_r^{(N_c+1)}}}{\eta_0} E'_0}_{h_{tan}^0} e^{-j(k_{x0}x + k_{z0}z)} (\hat{x} \sin \psi^i - \hat{z} \cos \psi^i) \quad (3.9)$$

où  $R$  est le coefficient de réflexion d'une onde plane incidente à l'interface supérieure au-dessus de la couche supérieure. Si on définit une impédance  $Z_{tan} = \frac{e_{tan}^0}{h_{tan}^0}$ , on peut écrire les relations suivantes entre  $Z_{tan}$  et  $R$  :

$$Z_{tan} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r^{(N_c+1)}}} \frac{1 + R}{1 - R} \quad R = \frac{Z_{tan} - \eta_0 / \sqrt{\epsilon_r^{(N_c+1)}}}{Z_{tan} + \eta_0 / \sqrt{\epsilon_r^{(N_c+1)}}} \quad (3.10)$$

### 3.2.2 Forme discrétisée et normalisée

Le champ électrique tangentiel  $\vec{e}_{tan}$ , discrétisé en employant la notation des équations (2.5) et (2.6) et normalisé selon (2.31) à (2.34), peut s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}_h \mathbf{E}_z^t &= - \underbrace{(1 + R) E_0'}_{E_0''} \cos \alpha^i \cos \psi^i \mathbf{I}_v \\ \hat{\mathbf{S}}_e \mathbf{E}_z^t &= - \underbrace{(1 + R) E_0'}_{E_0''} \cos \alpha^i \sin \psi^i \mathbf{I}_v \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

où  $\mathbf{I}_v$  est un vecteur de taille  $N_x N_z$  dont tous les éléments ont la valeur 1. En utilisant la notation compacte définie en (2.119), on obtient :

$$\mathbf{E}_{N_c B}^{tan, norm} = \underbrace{(1 + R) E_0'}_{E_0''} \begin{bmatrix} -\cos \alpha^i \cos \psi^i \mathbf{I}_v \\ j \cos \alpha^i \sin \psi^i \mathbf{I}_v \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

où l'indice  $N_c$  représente le numéro de la couche diélectrique supérieure,  $E_0'$  est l'amplitude du champ électrique tangentiel de l'onde plane incidente et  $E_0''$  est l'amplitude du champ électrique tangentiel total. En utilisant un raisonnement similaire pour représenter  $\vec{h}_{tan}$  sous forme discrétisée et normalisée, on obtient :

$$\frac{1}{\eta_0} \mathbf{H}_{N_c B}^{tan, norm} = \begin{bmatrix} -j \hat{\mathbf{S}}_h \mathbf{H}_z^t \\ \hat{\mathbf{S}}_e \mathbf{H}_z^t \end{bmatrix} = \underbrace{(1 - R) \frac{\sqrt{\epsilon_r^{(N_c+1)}}}{\eta_0} E_0'}_{H_0''} \begin{bmatrix} j \cos \psi^i \mathbf{I}_v \\ \sin \psi^i \mathbf{I}_v \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

#### 3.2.2.1 Calcul du coefficient de réflexion $R$

Pour obtenir le coefficient de réflexion de l'onde plane incidente, il faut d'abord exciter la structure selon la méthode décrite en 2.10 avec le champ électrique tangentiel discrétisé donné par (3.12) en choisissant une amplitude  $E_0''$  quelconque. La source idéale de champ électrique tangentiel est placée à l'interface  $N_c + 1$  de la structure (voir figure 1.1), soit juste au-dessus de la couche d'air épaisse ajoutée pour les

fins de l'excitation. Puis, à partir du résultat numérique obtenu pour le champ électrique tangentiel aux interfaces  $N_c - 1$  et  $N_c$  (figure 1.1) et de l'équation (2.99), on peut calculer le champ magnétique discrétisé  $\mathbf{H}_{N_c B}^{tan, norm}$  à l'interface supérieure. Ce champ devrait avoir la forme donnée par (3.13), pour autant que la *condition de réflexion spéculaire* définie plus haut soit respectée. On peut ensuite extraire  $H_0''$  :

$$H_0'' = \frac{1}{\sin \psi^i} \hat{\mathbf{S}}_e (i_x + (i_z - 1)N_x, i_x + (i_z - 1)N_x) \mathbf{H}_x^t (i_x + (i_z - 1)N_x) \quad (3.14)$$

où  $i_x \in [1, N_x]$  et  $i_z \in [1, N_z]$ . Ces valeurs sont arbitraires puisque le vecteur  $\hat{\mathbf{S}}_e \mathbf{H}_x^t$  est constant (voir équation (3.13)). En définissant l'impédance  $Z_{tan} = E_0''/H_0''$ , on peut finalement obtenir le coefficient de réflexion de l'onde plane incidente :

$$R = \frac{Z_{tan} - \eta_0 / \sqrt{\epsilon_r^{(N_c+1)}}}{Z_{tan} + \eta_0 / \sqrt{\epsilon_r^{(N_c+1)}}} \quad (3.15)$$

### 3.2.2.2 Calcul du coefficient de transmission $T$

Nous définirons  $T$  comme le coefficient de transmission de l'onde plane incidente (dans le plan de l'interface  $m = N_c$ ) à l'onde plane transmise à l'interface  $m = 0$  et qui se propage sans pertes du côté inférieur de l'antenne.

Comme nous l'avons déjà vu, les champs électromagnétiques totaux dans le voisinage immédiat de l'antenne sont composés d'une superposition d'ondes planes. Cependant, puisque la *condition de réflexion spéculaire* définie plus haut est respectée, seule la composante fondamentale, correspondant à l'onde plane se dirigeant dans la même direction que l'onde incidente, se propage sans pertes. Nous savons que :

$$\hat{\mathbf{S}}_\varphi \bar{\mathbf{E}}_x^t = \hat{\mathbf{T}}_e^t \hat{\mathbf{S}}_h \mathbf{E}_x^t = TFD \left( \hat{\mathbf{S}}_h \mathbf{E}_x^t \right) \quad (3.16)$$

$$\bar{\mathbf{E}}_z^t = \hat{\mathbf{T}}_e^t \hat{\mathbf{S}}_e \mathbf{E}_z^t = TFD \left( \hat{\mathbf{S}}_e \mathbf{E}_z^t \right) \quad (3.17)$$

où le symbole  $TFD$  représente la *Transformée de Fourier Discrète* telle que définie par (2.142) et (2.143). Nous pouvons donc extraire la valeur des composantes tangentielles de champ électrique de l'onde plane transmise à partir du champ électrique tangentiel total en extrayant la composante fondamentale du champ transformé :

$$\mathbf{E}_{0B,fondamentale}^{tan,norm} = \frac{1}{\sqrt{N_x N_z}} \begin{bmatrix} \overline{E}_{x(m=0)}(k_x = 0, k_z = 0) \\ \overline{E}_{z(m=0)}(k_x = 0, k_z = 0) \end{bmatrix} = T E'_0 \begin{bmatrix} -\cos \alpha^i \cos \psi^i \\ j \cos \alpha^i \sin \psi^i \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

où  $m$  représente l'indice de l'interface et  $k_x, k_z$  sont les indices de la composante spectrale.  $T$  est le coefficient de transmission défini plus haut. Une simple manipulation de la première ligne de (3.18) permet d'isoler l'expression  $T E'_0$  :

$$T E'_0 = -\frac{\overline{E}_{x(m=0)}(k_x = 0, k_z = 0)}{\sqrt{N_x N_z} \cos \alpha^i \cos \psi^i} \quad (3.19)$$

En combinant cette dernière équation, la valeur choisie de  $E''_0$  et le résultat numérique obtenu pour  $R$ , on peut calculer le coefficient de transmission  $T$  :

$$T = -\frac{(1 + R)}{E''_0} \frac{\overline{E}_{x(m=0)}(k_x = 0, k_z = 0)}{\sqrt{N_x N_z} \cos \alpha^i \cos \psi^i} \quad (3.20)$$

L'une des vérifications les plus simples que l'on puisse faire à partir des résultats obtenus est de vérifier qu'il y a conservation de la puissance. Lorsqu'il n'y a pas de pertes dans le diélectrique, l'équation suivante doit toujours être vérifiée :

$$|R|^2 + |T|^2 = 1 \quad (3.21)$$



### 3.3 Formulation de la source à polarisation $TM$

Dans cette section, nous formulerons l'application d'une source formée d'une onde plane incidente à polarisation  $TM$ . Les développements utilisés sont similaires à ceux de la section précédente.

#### 3.3.1 Forme analytique

Reprenons le cheminement effectué à la section 3.2 pour le cas de la polarisation  $TM$ . Les champs électromagnétiques d'une onde plane incidente dans le cas de l'excitation  $TM$  peuvent s'écrire :

$$\vec{e}_{TM}^i(x, y, z) = E_0 e^{-j(k_{x0}x + k_{yi}y + k_{z0}z)} (\hat{x} \sin \psi^i - \hat{z} \cos \psi^i) \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \vec{h}_{TM}^i(x, y, z) = \frac{\sqrt{\epsilon_r^{(N_c+1)}}}{\eta_0} E_0 e^{-j(k_{x0}x + k_{yi}y + k_{z0}z)} & (\hat{x} \cos \alpha^i \cos \psi^i \\ & - \hat{y} \sin \alpha^i + \hat{z} \cos \alpha^i \sin \psi^i) \end{aligned} \quad (3.23)$$

où  $k_{x0}$ ,  $k_{yi}$ ,  $k_{z0}$ ,  $k_0$  et  $\epsilon_r^{(N_c+1)}$  ont la même signification qu'à la section 3.2. L'équation (3.6) s'applique toujours. De même, nous considérerons des cas respectant la *condition de réflexion spéculaire*.

Les champs tangentiels totaux à l'interface  $m = N_c$  sont, dans le cas  $TM$  :

$$\vec{e}_{tan}(x, z) = \underbrace{(1 + R)}_{e_{tan}^0} E'_0 e^{-j(k_{x0}x + k_{z0}z)} (\hat{x} \sin \psi^i - \hat{z} \cos \psi^i) \quad (3.24)$$

$$\vec{h}_{tan}(x, z) = \underbrace{(1 - R) \frac{\sqrt{\epsilon_r^{(N_c+1)}}}{\eta_0} E'_0}_{h_{tan}^0} e^{-j(k_{x0}x + k_{z0}z)} (\hat{x} \cos \alpha^i \cos \psi^i + \hat{z} \cos \alpha^i \sin \psi^i) \quad (3.25)$$

où  $R$  est ici aussi le coefficient de réflexion d'une onde plane incidente à l'interface supérieure au-dessus de la couche supérieure. L'équation (3.10) est toujours valable et permet de déterminer  $R$  à partir de l'impédance  $Z_{tan} = \frac{e_{tan}^0}{h_{tan}^0}$ .

### 3.3.2 Forme discrétisée et normalisée

Le champ électrique tangentiel  $\vec{e}_{tan}$ , discrétisé en employant la notation des équations (2.5) et (2.6) et normalisé selon (2.31) à (2.34), peut s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}_h \mathbf{E}_x' &= \underbrace{(1 + R) E_0'}_{E_0''} \sin \psi^i \hat{\mathbf{I}} \\ \hat{\mathbf{S}}_e \mathbf{E}_z' &= - \underbrace{(1 + R) E_0'}_{E_0''} \cos \psi^i \hat{\mathbf{I}} \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

où  $\mathbf{I}_v$  est un vecteur de taille  $N_x N_z$  dont tous les éléments ont la valeur 1. En utilisant la notation compacte définie en (2.119), on obtient :

$$\mathbf{E}_{N_c B}^{tan, norm} = \underbrace{(1 + R) E_0'}_{E_0''} \begin{bmatrix} \sin \psi^i \mathbf{I}_v \\ j \cos \psi^i \mathbf{I}_v \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

où l'indice  $N_c$  représente le numéro de la couche diélectrique supérieure. En utilisant un raisonnement similaire pour représenter  $\vec{h}_{tan}$  sous forme discrétisée et normalisée, on obtient :

$$\frac{1}{\eta_0} \mathbf{H}_{N_c B}^{tan, norm} = \begin{bmatrix} -j \hat{\mathbf{S}}_h \mathbf{H}_z' \\ \hat{\mathbf{S}}_e \mathbf{H}_x' \end{bmatrix} = \underbrace{(1 - R) E_0' \frac{\sqrt{\epsilon_r^{(N_c+1)}}}{\eta_0}}_{H_0''} \begin{bmatrix} -j \cos \alpha^i \sin \psi^i \mathbf{I}_v \\ \cos \alpha^i \cos \psi^i \mathbf{I}_v \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

### 3.3.2.1 Calcul du coefficient de réflexion $R$

Suivant l'approche de 3.2.2.1, on extrait d'abord  $H_0''$  :

$$H_0'' = \frac{1}{\cos \alpha^i \cos \psi^i} \hat{\mathbf{S}}_e(i_x + (i_z - 1)N_x, i_x + (i_z - 1)N_x) \mathbf{H}_x^e(i_x + (i_z - 1)N_x) \quad (3.29)$$

où  $i_x \in [1, N_x]$  et  $i_z \in [1, N_z]$ . Puis on utilise (3.15) pour le calcul de  $R$  en prenant  $Z_{tan} = E_0''/H_0''$ .

### 3.3.2.2 Calcul du coefficient de transmission $T$

De façon analogue à (3.2.2.2), on peut, à partir de la valeur choisie de  $E_0''$  et du résultat numérique obtenu pour  $R$ , calculer le coefficient de transmission  $T$  :

$$T = -\frac{(1 + R) \overline{E}_{x(m=0)}(k_x = 0, k_z = 0)}{E_0'' \sqrt{N_x N_z} \sin \psi^i} \quad (3.30)$$

Finalement, l'équation (3.21) devrait aussi être vérifiée dans le cas  $TM$ .

## 3.4 Résultats, validation et convergence

Dans cette section, nous présenterons des résultats de simulation pour un réseau linéaire de rubans métalliques infinis, puis pour un réseau planaire de plaques métalliques rectangulaires. Les choix concernant les structures simulées ainsi que les modes d'excitation ont été faits de façon à permettre la validation avec des résultats publiés dans [24] et [10]. Dans le premier cas, l'excitation consiste en une onde plane de polarisation  $TE$  à incidence oblique en présence des bandes métalliques. Dans le second cas, il s'agit d'une onde plane à incidence normale sur un réseau planaire de plaques métalliques. La polarisation de cette onde ne peut être dénommée ni  $TE$  ni  $TM$  car le plan d'incidence est indéterminé pour une incidence normale.

### 3.4.1 Réseau linéaire de bandes métalliques sur un substrat diélectrique

La figure 1.2 présente un réseau linéaire périodique de bandes métalliques déposées sur un substrat diélectrique. Il s'agit en fait d'un cas simple de surface à sélection de fréquences, possédant une géométrie bi-dimensionnelle. Nous considérons ici l'excitation  $TE$  seulement (définie plus haut). Les paramètres de la structure sont la permittivité du substrat  $\epsilon_r$  et son épaisseur  $d$ , la largeur des rubans métalliques  $L_{ruban}$  et la période  $L_{cellule}$  entre les rubans. Les résultats désirés sont des courbes de réflexion  $|R|^2$  et de transmission  $|T|^2$  de puissance en fonction de la largeur relative des bandes métalliques  $L_{ruban}/L_{cellule}$ .

#### 3.4.1.1 Discrétisation des bandes métalliques

Tel qu'expliqué en 2.12.1, pour un nombre de lignes  $N_x$  et une période  $L_{cellule}$  donnés, seul un ensemble fini de largeurs effectives  $L_{ruban}$  peuvent être simulées. Plus  $N_x$  est élevé, plus le nombre de valeurs de  $L_{ruban}$  représentables en simulation augmente. Pour des valeurs fixes de  $L_{cellule}$  et de  $N_x$ , les valeurs représentables de  $L_{ruban}$  sont données par l'équation (2.148) dans laquelle on prend  $p = 0.25$ , le paramètre de bord optimal dans le cas 2D. La position effective du ruban par rapport à la cellule n'est pas importante, car la structure physique représentée est la même quelle que soit cette position. Ainsi, toutes les simulations peuvent être effectuées sans erreur de discrétisation par rapport aux paramètres de discrétisation choisis.

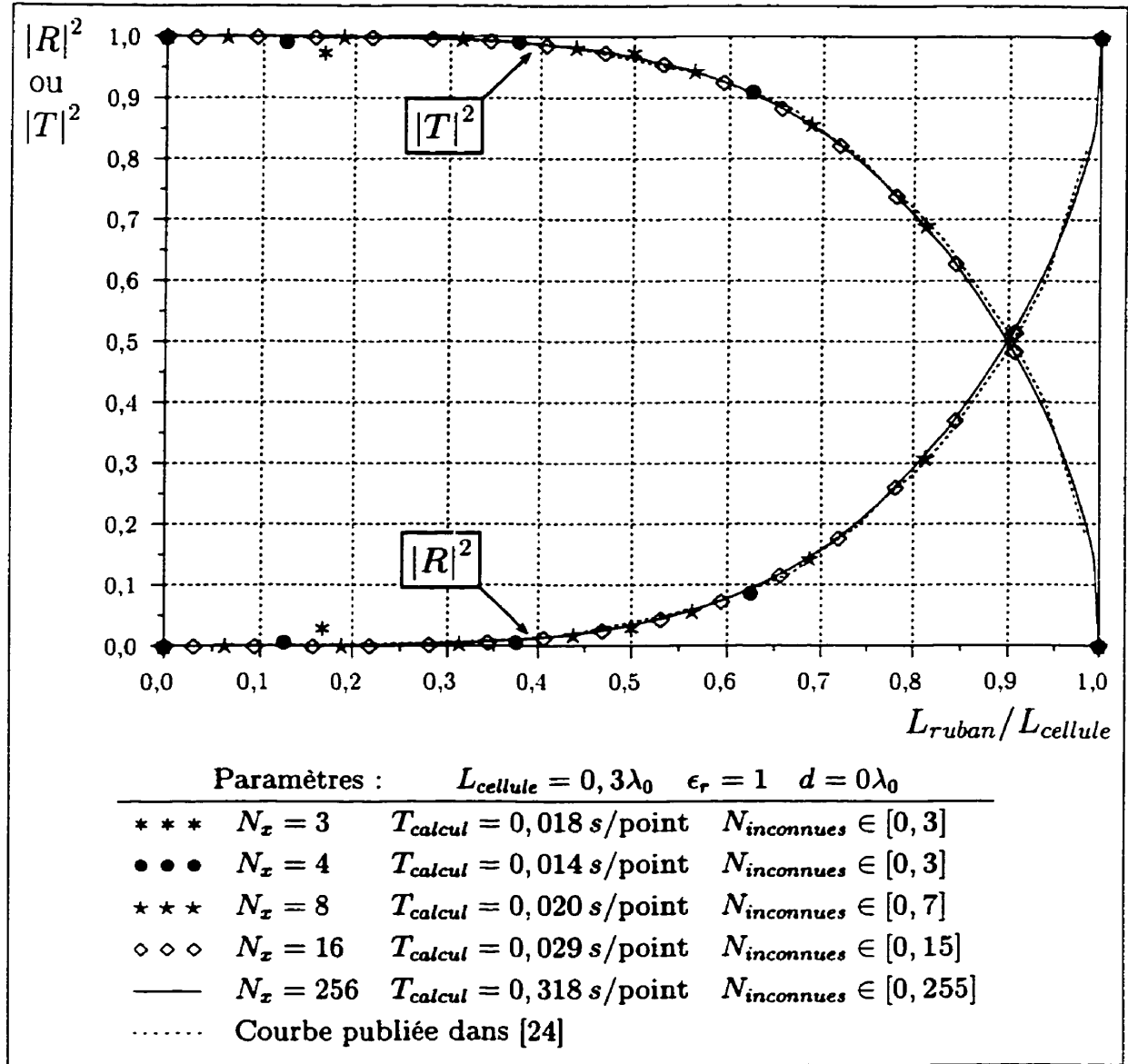
#### 3.4.1.2 Résultats obtenus

Quatre configurations, présentées successivement aux figures 3.3 à 3.6, sont analysées et comparées aux résultats de [24]. Les deux premières configurations comportent des éléments espacés de  $0,3\lambda_0$  et placés soit dans l'espace libre (premier cas, figure 3.3) soit sur un substrat de permittivité  $\epsilon_r = 2$  (deuxième cas, figure 3.4). Les deux suivantes, elles, comportent un espacement de  $0,5\lambda_0$  et les rubans sont placées

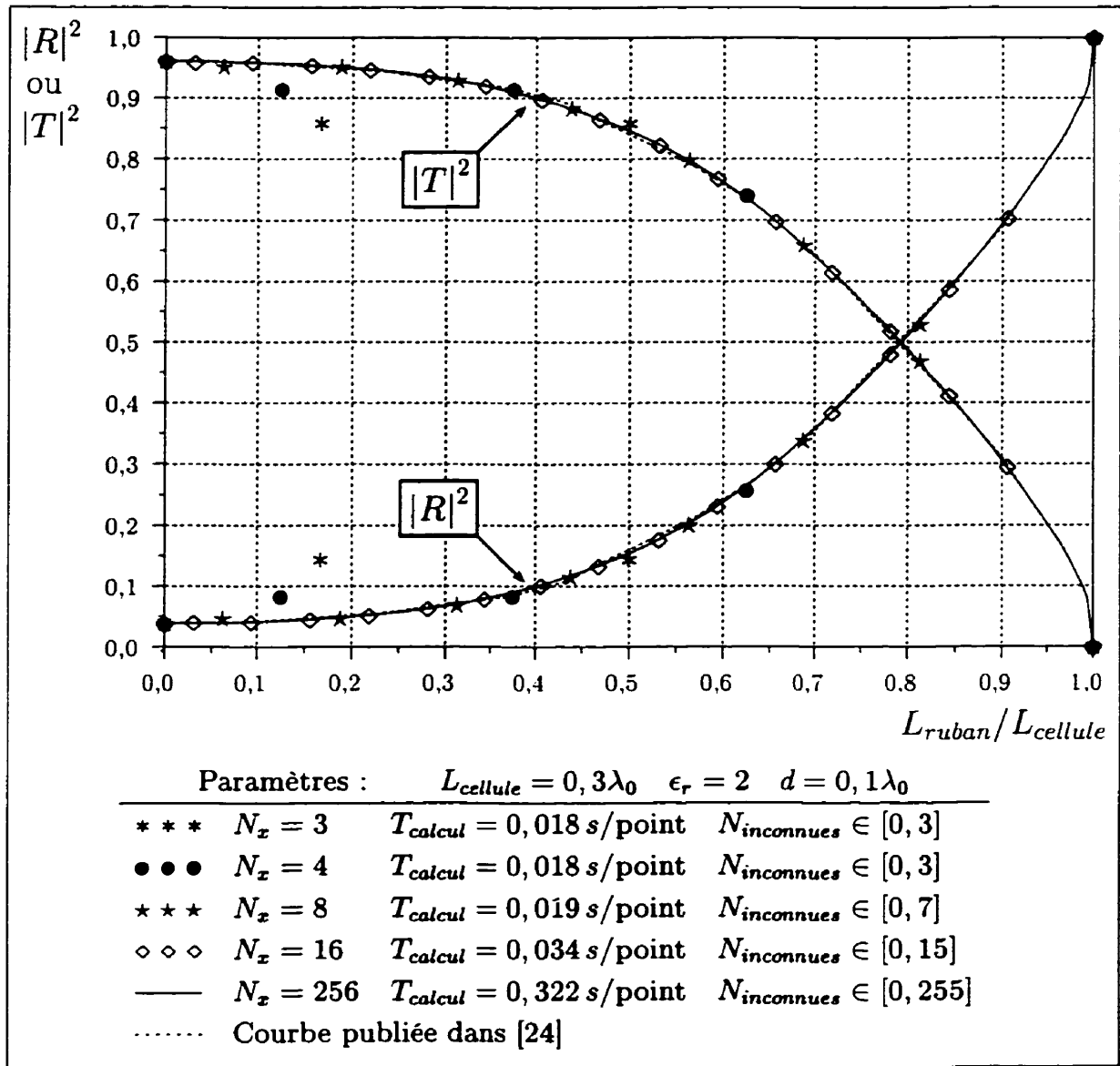
soit dans l'espace libre (figure 3.5) soit sur un substrat de permittivité  $\epsilon_r = 2$ . Pour chacune des quatre configurations, les coefficients de réflexion  $|R|^2$  et de transmission  $|T|^2$  de puissance sont tracés pour différents niveaux de discrétisation  $N_x$ . L'angle d'incidence de l'onde plane est de 30 degrés par rapport à la normale à la surface pour tous les cas considérés. On constate que les résultats pour des valeurs de  $N_x$  aussi petites que 8 tombent pratiquement sur la courbe convergée, de sorte qu'on peut parler d'une convergence très rapide. Néanmoins, il est clair qu'il faut augmenter  $N_x$  pour obtenir un meilleur échantillonnage de la largeur relative du ruban  $L_{ruban}/L_{cellule}$ .

Les résultats obtenus permettent d'illustrer le fait que l'ajout d'un substrat diélectrique a tendance à élever le niveau de réflexion de puissance, car la présence du diélectrique produit une discontinuité supplémentaire entre les éléments métalliques. D'autre part, lorsque l'on compare les courbes de mêmes permittivités mais d'espacements  $L_{cellule}$  différents, on constate que la réflexion de puissance est supérieure dans le cas où l'espacement est plus grand si l'on considère la taille relative  $L_{ruban}/L_{cellule}$  du ruban ; par contre, elle est inférieure si l'on compare des niveaux de réflexion correspondant à une valeur fixe de la largeur du ruban,  $L_{ruban}$ . C'est effectivement ce à quoi l'on pourrait s'attendre, car plus la proportion de surface métallisée est grande, plus la réflexion devrait être importante.

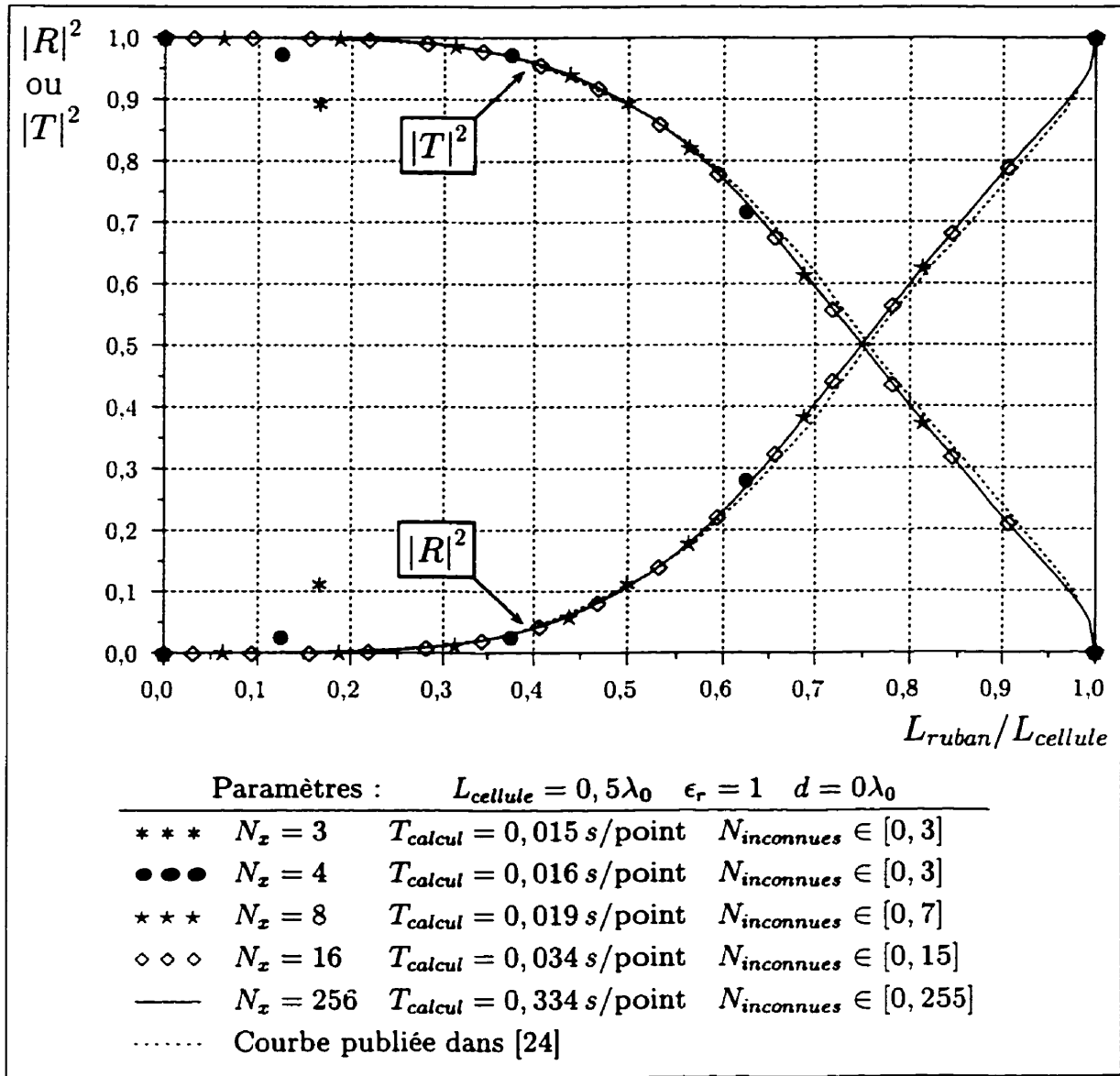
Les courbes convergées concordent très bien avec les résultats publiés dans [24]. De plus, on constate que les valeurs obtenues par simulation pour  $|R|^2$  et  $|T|^2$  respectent la conservation de puissance énoncée à l'équation (3.21).



**Figure 3.3:** Courbes de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane (angle d'incidence de 30 degrés par rapport à la normale) sur un réseau linéaire de rubans métalliques espacés de  $0,3\lambda_0$  et sans substrat diélectrique. Résultats avec la méthode des lignes pour 5 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [24].

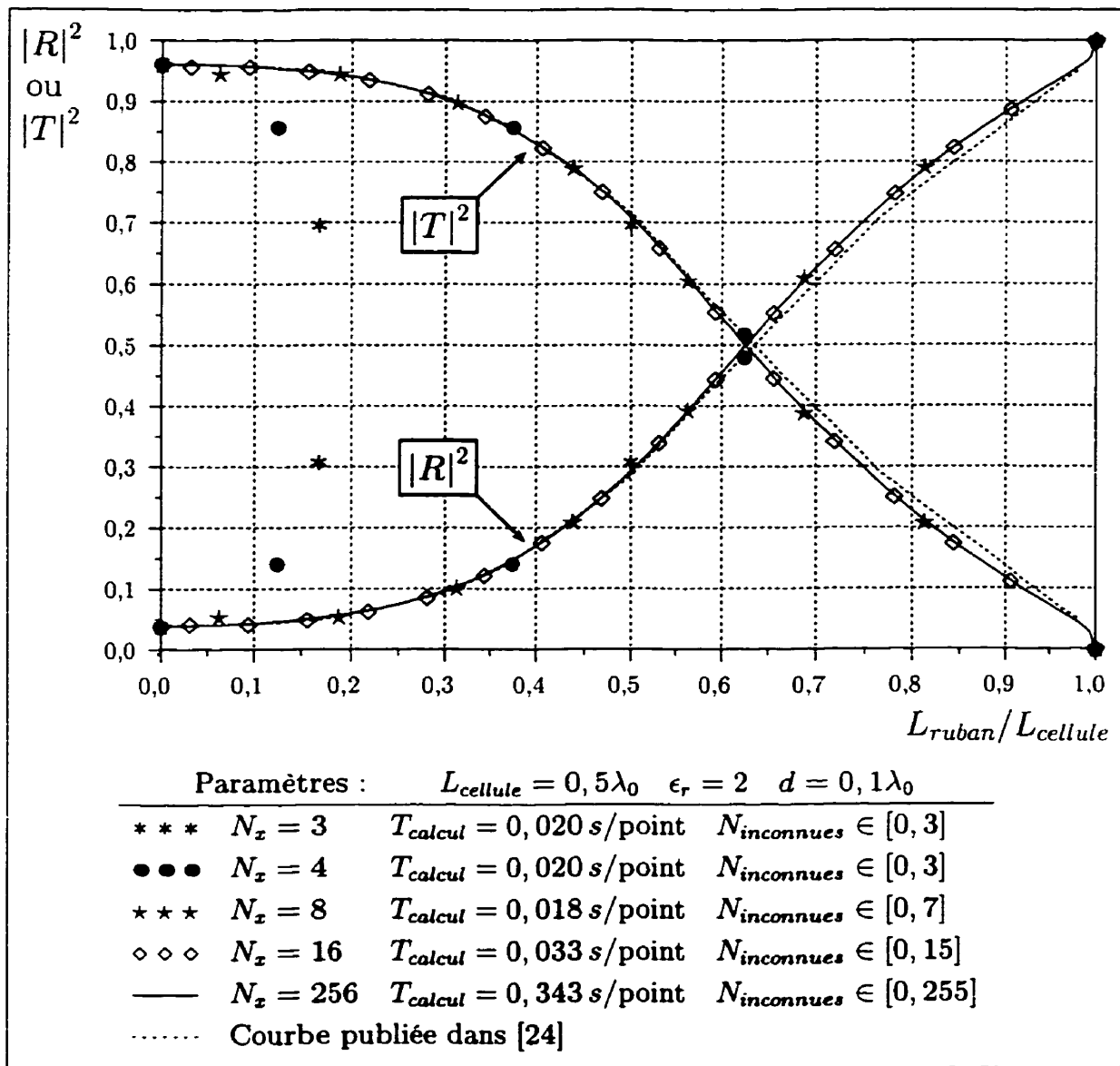


**Figure 3.4:** Courbes de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane (angle d'incidence de 30 degrés par rapport à la normale) sur un réseau linéaire de rubans métalliques espacés de  $0,3\lambda_0$  et déposés sur un substrat diélectrique de permittivité  $\epsilon_r = 2$  et d'épaisseur  $d = 0,1\lambda_0$ . Résultats avec la méthode des lignes pour 5 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [24].



**Figure 3.5:** Courbes de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane (angle d'incidence de 30 degrés par rapport à la normale) sur un réseau linéaire de rubans métalliques espacés de  $0,5\lambda_0$  et sans substrat diélectrique. Résultats avec la méthode des lignes pour 5 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [24].





**Figure 3.6:** Courbes de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane (angle d'incidence de 30 degrés par rapport à la normale) sur un réseau linéaire de rubans métalliques espacés de  $0,5\lambda_0$  et déposés sur un substrat diélectrique de permittivité  $\epsilon_r = 2$  et d'épaisseur  $d = 0,1\lambda_0$ . Résultats avec la méthode des lignes pour 5 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [24].

### 3.4.2 Réseau planaire de plaques métalliques sur un substrat diélectrique

À présent que le logiciel est validé pour l'analyse de structures à deux dimensions (réseaux de rubans métalliques), nous pouvons passer à l'étape suivante, soit la simulation de structures à trois dimensions, en l'occurrence un réseau planaire de plaques métalliques déposées sur un substrat diélectrique. La structure étudiée est illustrée à la figure 3.1. Ses paramètres sont la permittivité du substrat  $\epsilon_r$  et son épaisseur  $d$ , les dimensions des plaques métalliques  $L_x^{plaque}$  et  $L_z^{plaque}$  ainsi que les périodes  $L_x$  et  $L_z$  entre les plaques ; ces dernières correspondent aux dimensions de la cellule de base à analyser. Afin de permettre une validation des résultats avec [10], les résultats désirés sont des courbes de réflexion  $|R|^2$  et de transmission  $|T|^2$  de puissance en fonction de la fréquence d'opération.

#### 3.4.2.1 Discrétisation des plaques métalliques

Dans le cas des rubans métalliques étudié en 3.4.1.1, l'abscisse des courbes tracées était la taille des rubans. Ceci avait l'avantage de nous permettre de placer chacun des résultats obtenus à l'abscisse correspondant à la largeur effective du ruban obtenue pour une valeur entière de  $N_{l_{xx}}^m$ . Dans le cas présent, cependant, l'abscisse des courbes désirées est la fréquence. Puisque les dimensions de la cellule périodique et de la plaque métallique sont fixes, il nous faut donc choisir judicieusement les valeurs de  $N_x$  qui nous permettront d'obtenir des dimensions effectives égales aux dimensions voulues, afin d'éviter les erreurs de discrétisation. Les trois configurations que nous désirons simuler pour validation avec [10] ont les dimensions suivantes :

$$L_x = L_z = 2 \text{ cm} \quad L_x^{plaque} = L_z^{plaque} = 1 \text{ cm} \quad (3.31)$$

Nous avons donc  $L_x^{plaque}/L_x = L_z^{plaque}/L_z = \frac{1}{2}$  et nous utiliserons comme paramètre de bord  $p = 0.25$ , tel que justifié en 2.12. Ainsi, pour cette configuration, l'équation (2.150) nous amène à la conclusion que, pour obtenir des dimensions ef-

fectives  $L_x^{plaque\ eff}$  et  $L_z^{plaque\ eff}$  exactement égales aux dimensions voulues selon le paramètre de bord choisi, il suffit de choisir des valeurs impaires pour  $N_x$  et  $N_z$ . Il faut souligner que le paramètre de bord ( $p = 0, 25$ ) utilisé n'est pas optimal ; la valeur optimale (qui pourrait être déterminée par essais et erreurs) permettrait d'obtenir une meilleure convergence des résultats.

Il est clair que ce cas ( $L_x^{plaque}/L_x = L_z^{plaque}/L_z = \frac{1}{2}$ ) est l'un des plus simples, puisque la restriction imposée sur  $N_x$  et  $N_z$  est relativement facile à respecter. Néanmoins, il nous permettra d'apprécier le comportement de la convergence dans les deux cas extrêmes, soit :

1. lorsque l'on effectue un choix des valeurs de  $N_x$  et  $N_z$  résultant en des dimensions effectives exactement égales aux dimensions voulues (ici, lorsque les valeurs de  $N_x$  et  $N_z$  sont impaires) ;
2. lorsque l'on choisit des valeurs de  $N_x$  et  $N_z$  résultant en une erreur de discrétisation systématique (ici, lorsque les valeurs de  $N_x$  et  $N_z$  sont paires).

Nous effectuerons donc intentionnellement les calculs pour la deuxième situation, de façon à visualiser l'effet sur la convergence de mauvais choix des valeurs de  $N_x$  et  $N_z$  résultant en des erreurs de discrétisation. Plusieurs rapports  $L_{x,z}^{plaque}/L_{x,z}$  permettent de choisir un ensemble de valeurs  $N_{x,z}$  résultant en une discrétisation respectant parfaitement le paramètre de bord  $p$ . Cependant, pour des géométries quelconques, on doit simuler pour des valeurs non optimales de  $N_x$  et  $N_z$ , qui résulteront en un comportement semblable à celui que nous constateront plus loin lorsque l'on choisit des valeurs paires de  $N_x$  et  $N_z$  pour le cas  $L_x^{plaque}/L_x = L_z^{plaque}/L_z = \frac{1}{2}$ .

### 3.4.2.2 Résultats obtenus

Trois configurations sont considérées. Pour chacune des configurations, deux figures sont présentées, l'une comportant l'analyse de convergence sans erreur de dis-

crétisation effective <sup>3</sup> (valeurs de  $N_x$  et  $N_z$  impaires) et l'autre l'analyse de convergence avec erreur de discrétisation systématique (valeurs de  $N_x$  et  $N_z$  paires). Dans toutes les configurations, les dimensions de la cellule et de la plaque métallique sont les mêmes, soit  $L_x = L_z = 2$  cm et  $L_x^{plaque} = L_z^{plaque} = 1$  cm. Le premier cas est simulé sans substrat diélectrique, tandis que les deux cas suivants comportent un substrat diélectrique de permittivité  $\epsilon_r = 3.5$  dont l'épaisseur est de 0,1 cm et 0,2 cm, respectivement. Les résultats sont présentés aux figures 3.7 à 3.12.

On constate immédiatement que le choix de valeurs impaires pour  $N_x$  et  $N_z$  résulte en une convergence accélérée par rapport aux cas où l'on a choisi des valeurs paires. Dans le cas sans erreur de discrétisation effective ( $N_x$  et  $N_z$  impairs), on constate une convergence vers  $N_x = N_z = 33$ . Dans le cas comportant des erreurs de discrétisation systématiques ( $N_x$  et  $N_z$  pairs), la convergence se produit vers  $N_x = N_z = 128$ . Cette convergence retardée était prévisible ; néanmoins, on constate que les temps de calcul à ce niveau de discrétisation demeurent très acceptables. Ceci est dû à l'emploi de la méthode itérative Bi-CGSTAB2 (voir 2.11.3) de résolution du système d'équations, sans laquelle le temps de calcul pour la résolution d'un système d'équations de cette taille (8 320 inconnues) serait tout simplement inacceptable. Si on emploie la formule approximative (2.135), on obtient un temps de calcul d'une dizaine d'heures sur un ordinateur PC cadencé à 200 Mhz. Il s'agit là d'un temps idéal pouvant être accompli si on dispose d'un espace mémoire suffisant pour contenir la matrice complète de taille  $8\,320 \times 8\,320$ , soit environ 1 giga-octet de mémoire vive, ce qui est nettement au-dessus de la capacité de l'ordinateur à notre disposition (ce dernier comporte 192 Mo de mémoire vive). Ces calculs approximatifs permettent de réaliser que les temps de calcul obtenus pour la résolution de systèmes d'équations de 8 320 inconnues, soit autour de 150 s, sont très satisfaisants. Ces temps de calcul réduits permettent d'envisager l'application de ce modèle non seulement pour l'ana-

---

<sup>3</sup>L'erreur de discrétisation effective dont il est fait mention ici fait référence à l'écart entre les dimensions désirées et les dimensions effectives calculées à partir des paramètres de discrétisation choisis. Cette nomenclature est utilisée dans la suite du mémoire.

lyse des SSF mais aussi pour la conception, au moyen d'un processus d'optimisation. Ainsi, les dimensions seraient ajustées d'une simulation à l'autre jusqu'à ce que l'on obtienne les performances désirées.

Il importe de mentionner que les simulations effectuées afin d'obtenir ces résultats ont été faites en employant comme paramètres de convergence  $\nu = 0,5$ ,  $\xi = 0,001$  et  $N_{conv} = 3$  (voir section 2.11.3.1). L'usage répété du logiciel permet de constater que ces paramètres sont très conservateurs ; afin de réduire davantage les temps de calcul, il serait possible d'utiliser des critères moins exigeants, tel qu'une valeur réduite de  $N_{conv}$ . Cependant, la valeur employée donne un excellent niveau de confiance quant à la convergence des valeurs de coefficients de réflexion et de transmission.

En ce qui a trait aux résultats obtenus, il concordent plutôt bien avec les résultats publiés dans [10]. Ces derniers ont été obtenus à l'aide d'une formulation de la méthode des moments employant des fonctions de base de type *toit de chalet* (de l'anglais *rooftop basis functions*). Les petits écarts qui subsistent entre les résultats convergés obtenus et la référence publiée sont attribués à la faible discrétisation employée pour les simulations effectuée par les auteurs de [10] pour les courbes considérées : 15 échantillons par longueur d'onde ont été utilisés dans la discrétisation de la plaque métallique, ce qui est nettement inférieur au niveau de discrétisation employé ici.

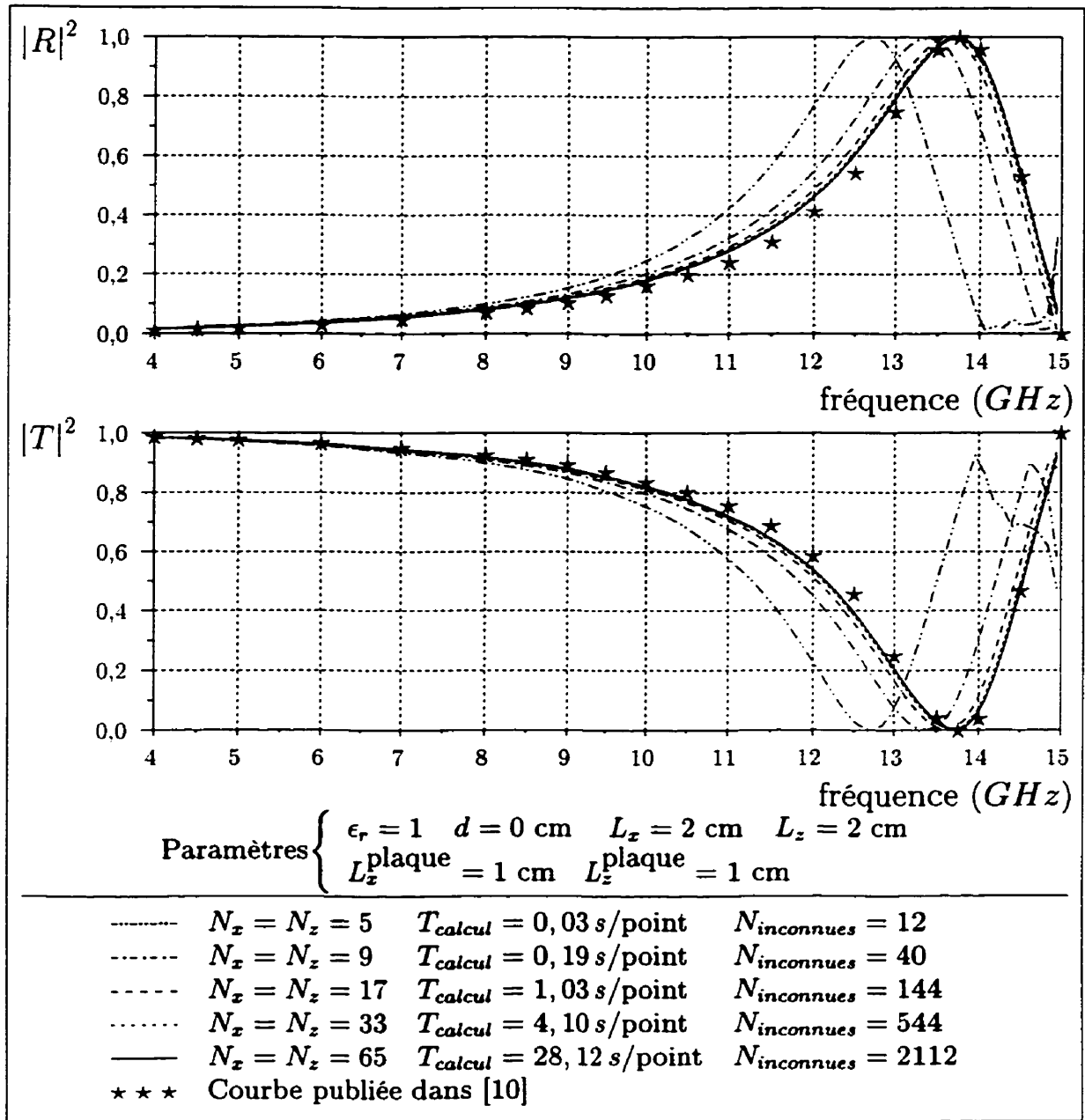
Au niveau de la nature des résultats obtenus, la comparaison des figures 3.7, 3.9 et 3.11 permet de constater que les principales caractéristiques des courbes de  $|R|^2$  et  $|T|^2$  sont graduellement déplacées vers des fréquences inférieures d'une figure à l'autre. Ceci peut s'expliquer par une augmentation de ce que l'on peut appeler la «permittivité effective» du milieu, causée d'abord par l'ajout d'un substrat diélectrique à la figure 3.9, puis par l'épaississement de ce substrat à la figure 3.11. Ce déplacement en fréquence est accompagné par l'apparition d'oscillations supplémentaires de la courbe à haute fréquence ; ces oscillations sont caractéristiques des phénomènes de diffraction produits près des structures de grande taille électrique.

L'augmentation de la «permittivité effective» du milieu est responsable de l'accroissement de la taille électrique effective des éléments. Toutefois, il importe de mentionner que, bien que l'espacement entre les éléments dans ce milieu à «permittivité effective» hypothétique soit plus élevé que la demi-longueur d'onde, la condition de réflexion spéculaire demeure respectée car cette dernière ne dépend que de la permittivité du milieu au-dessus de la structure rayonnante, l'espace libre dans lequel se propage la puissance rayonnée. La fréquence maximale (15 *GHz*) traitée aux figures 3.7 à 3.12 constitue la fréquence limite pour laquelle la condition de réflexion spéculaire est respectée pour les valeurs de  $L_x$  et  $L_z$  employées.

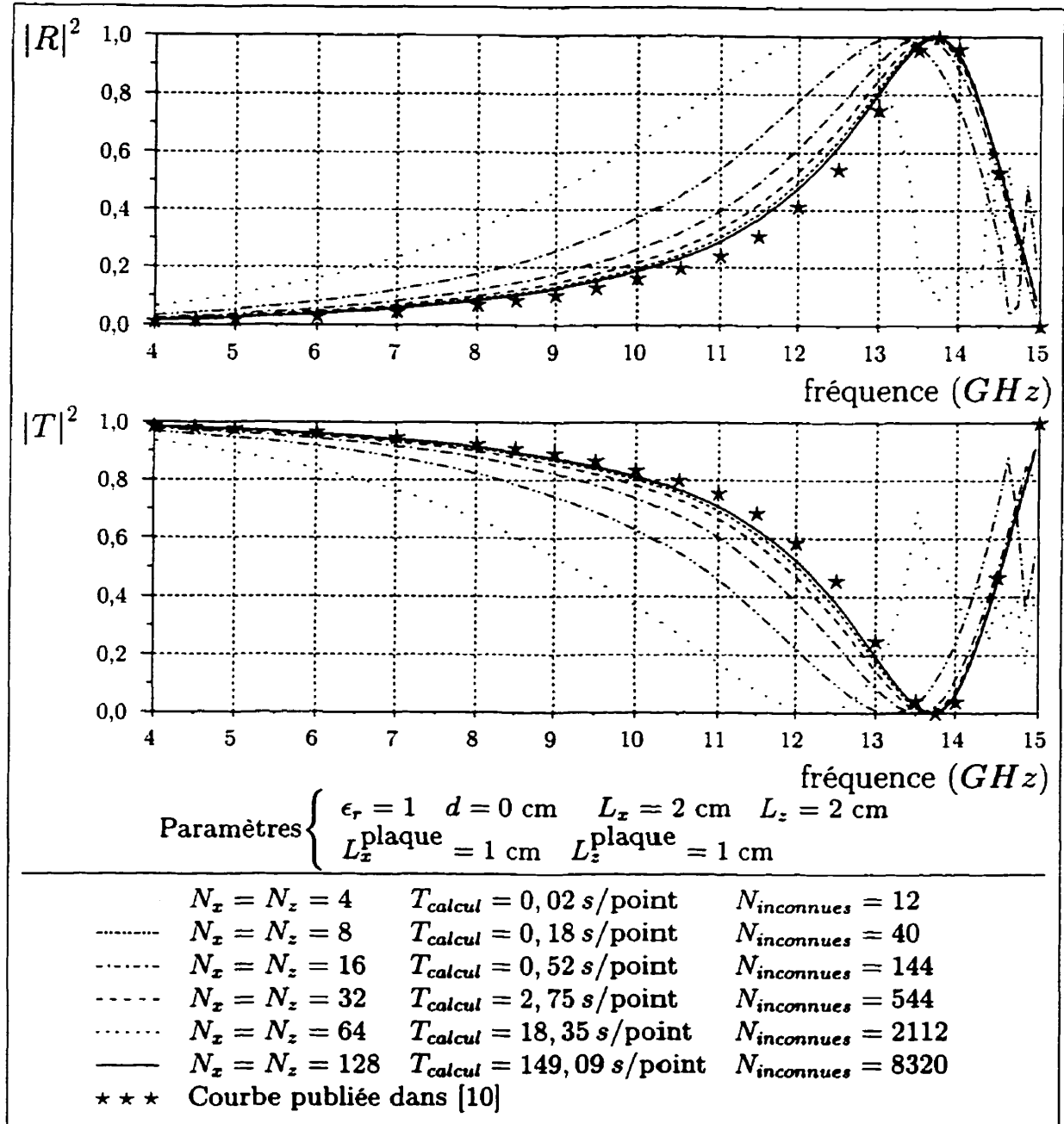
Finalement, à la lecture de la courbe convergée à la figure 3.9, on remarque que la structure simulée, comportant un substrat diélectrique de permittivité  $\epsilon_r = 3,5$  et d'épaisseur  $d = 0,1$  cm, pourrait être employée pour la réalisation d'un filtre pour une antenne double bande opérant à 11.5 et 13.5 GHz. En effet, ces deux fréquences sont presque parfaitement séparées par la SSF considérée : les ondes à  $f=13,5$  GHz sont presque totalement transmises tandis que celles à  $f=11,5$  GHz sont à toutes fins pratiques totalement réfléchies.

### 3.5 Conclusion du chapitre

À la lumière des résultats de simulation obtenus, on constate que la formulation développée est adéquate pour la simulation de structures périodiques à sélection de fréquences (*SSF*). Les résultats ont été validés avec succès à partir de publications utilisant d'autres méthodes d'analyse. De plus, les temps de calcul nécessaires à la simulation de ces structures sont très acceptables et l'approche employée pour la résolution des systèmes d'équations permet d'atteindre des niveaux de discrétisation élevés tout conservant l'espace mémoire nécessaire à des seuils raisonnables. Le prochain chapitre traitera de l'analyse de réseaux d'antennes basée sur une adaptation de la formulation décrite au chapitre 2.

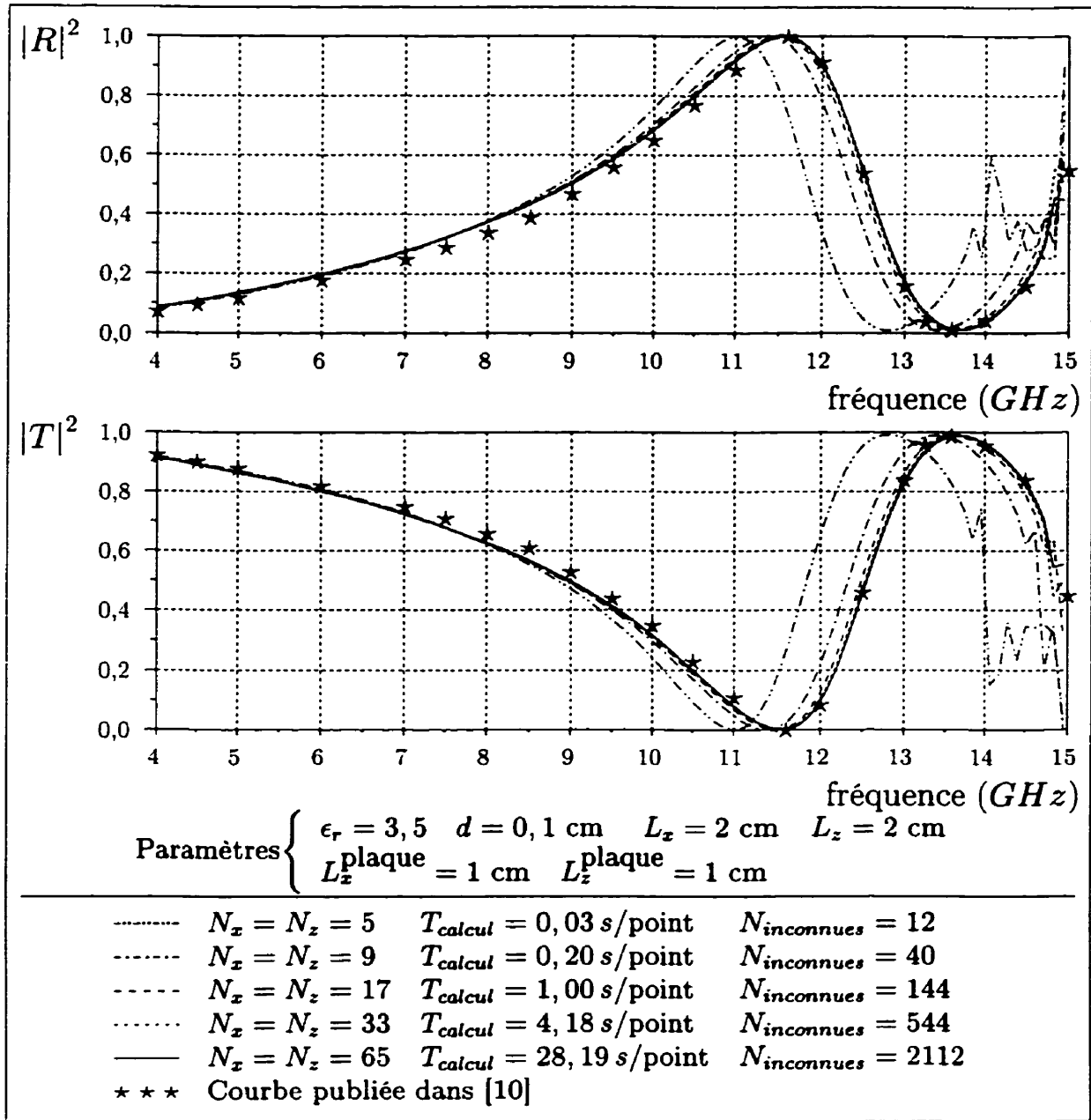


**Figure 3.7:** Courbes de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane à incidence normale sur un réseau planaire de plaques métalliques sans substrat. Cas sans erreur de discrétisation effective ( $N_x$  et  $N_z$  impairs).

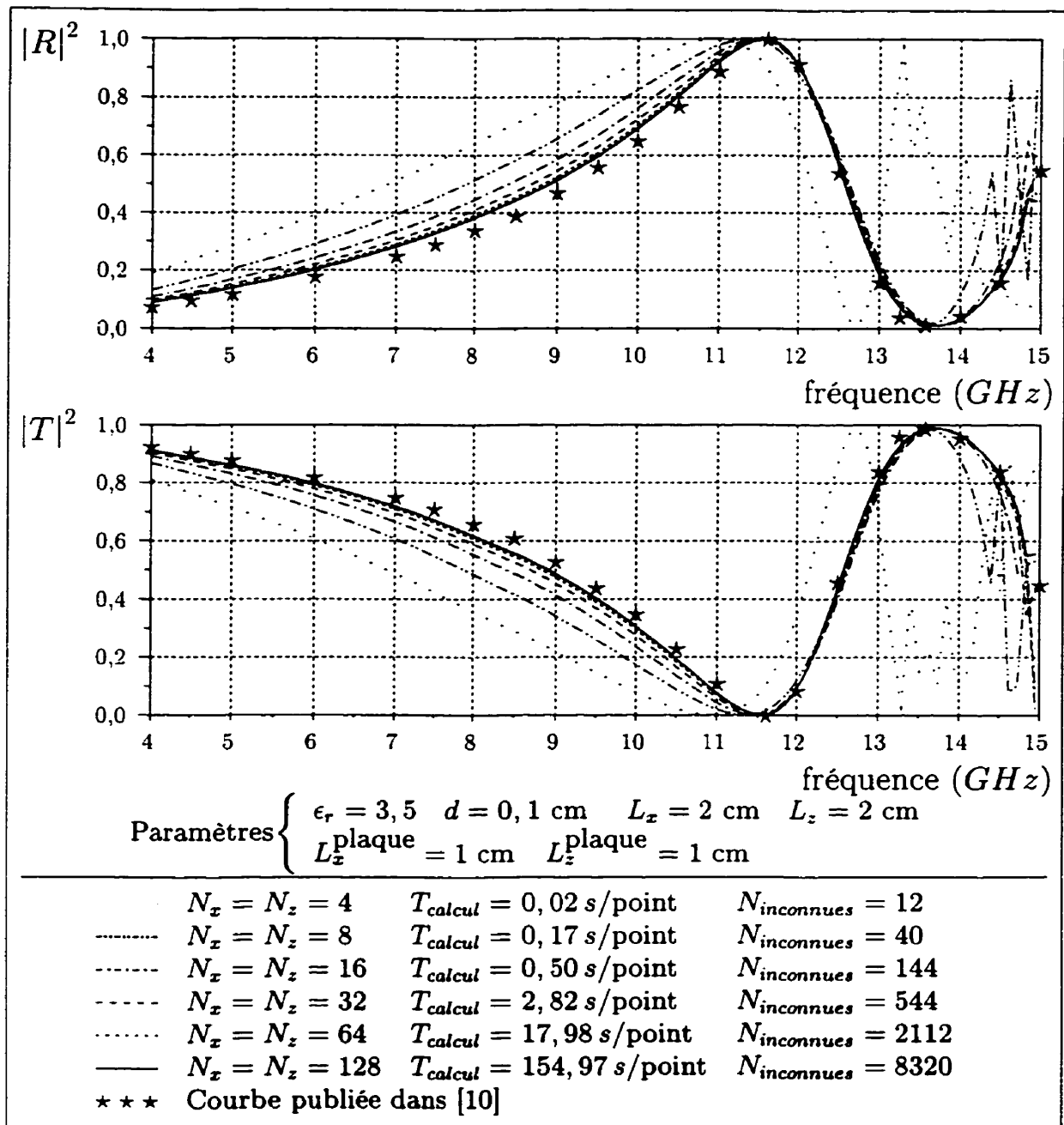


**Figure 3.8:** Courbes de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane à incidence normale sur un réseau planaire de plaques métalliques sans substrat. Cas avec erreurs de discrétisation systématiques ( $N_x$  et  $N_z$  pairs).

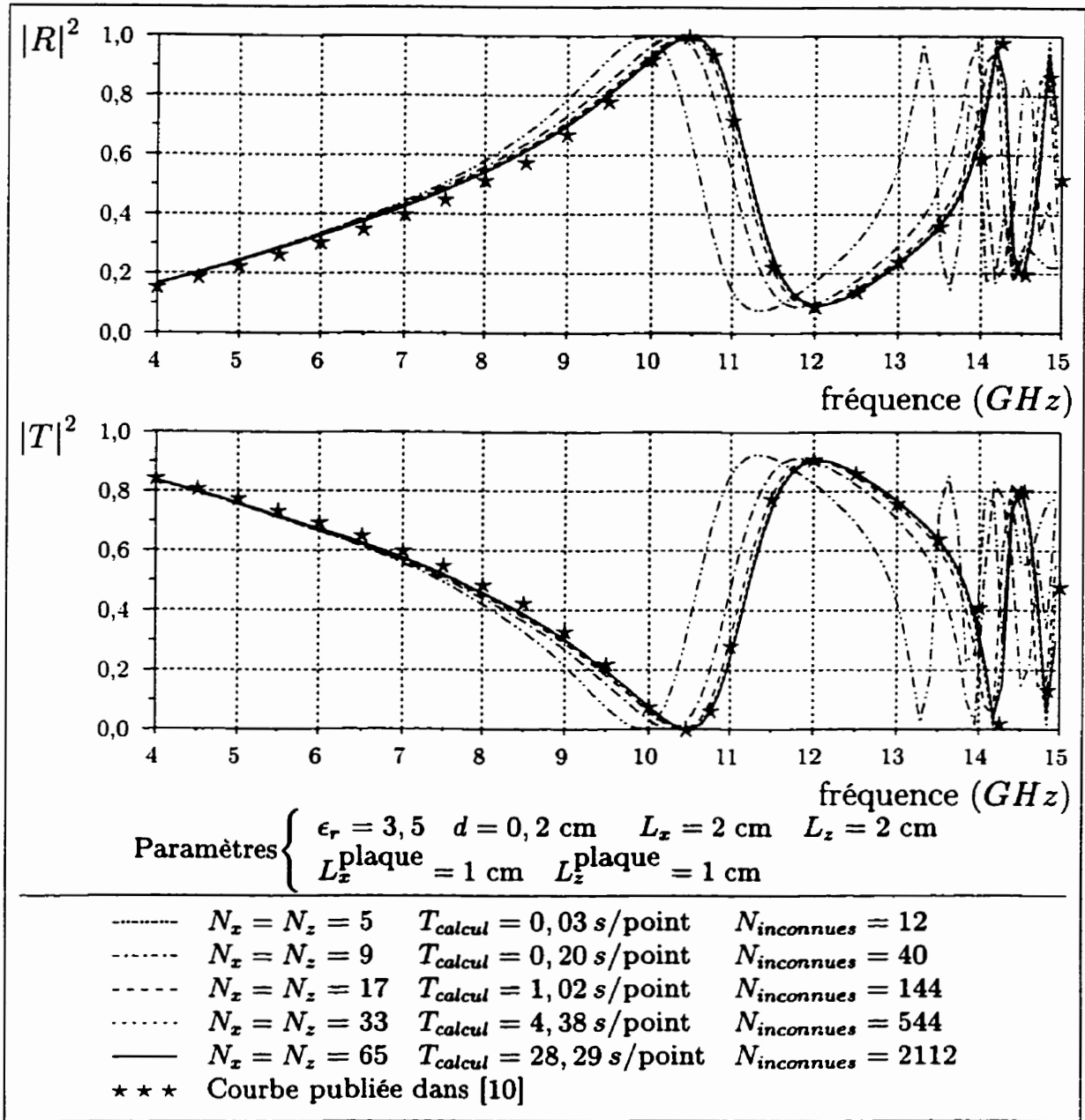




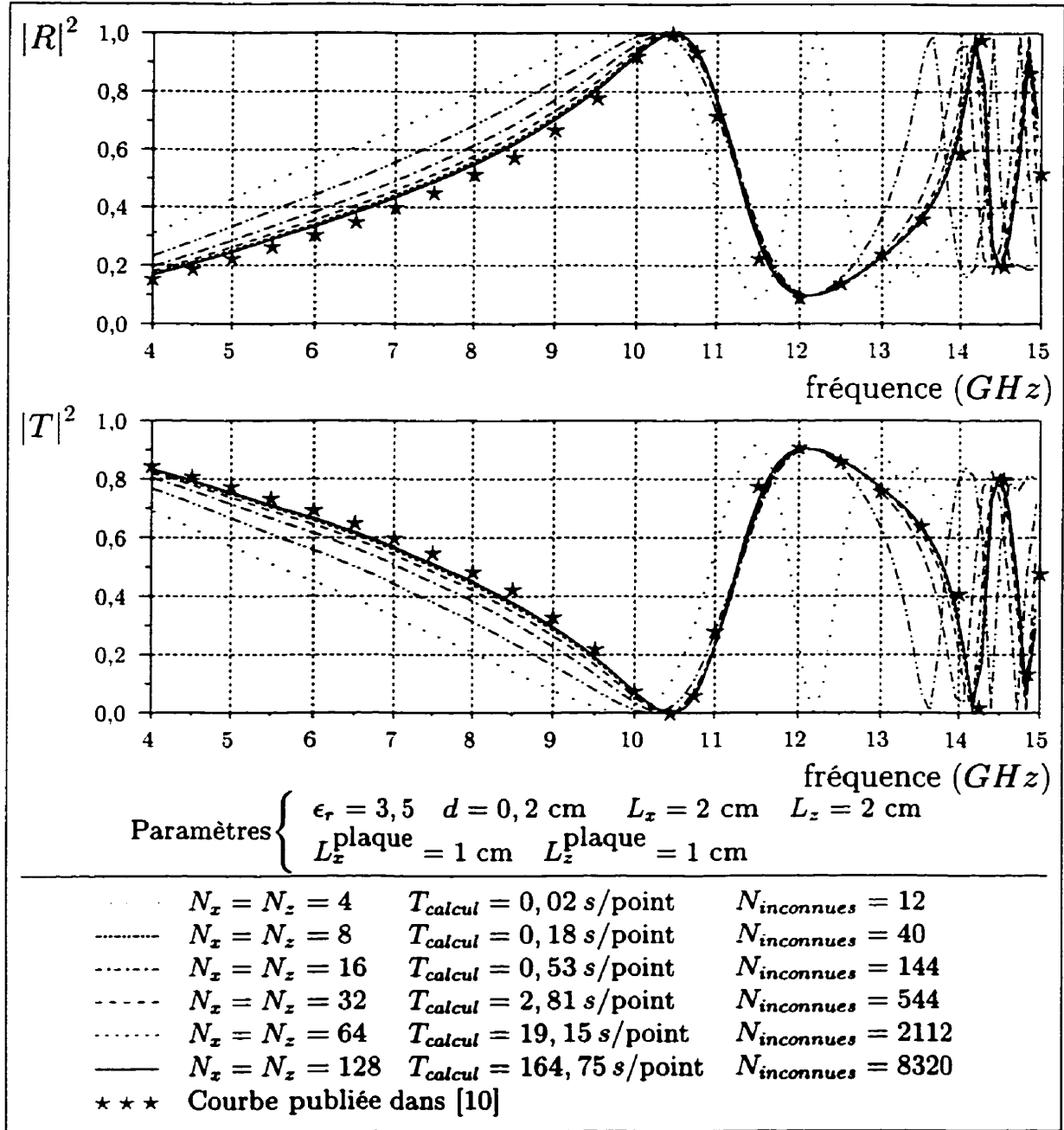
**Figure 3.9:** Courbes de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane à incidence normale sur un réseau planaire de plaques métalliques déposées sur un substrat de permittivité  $\epsilon_r = 3,5$  et d'épaisseur  $d = 0,1$  cm. Cas sans erreur de discrétisation effective ( $N_x$  et  $N_z$  impairs).



**Figure 3.10:** Courbes de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane à incidence normale sur un réseau planaire de plaques métalliques déposées sur un substrat de permittivité  $\epsilon_r = 3,5$  et d'une épaisseur  $d = 0,1$  cm. Cas avec erreurs de discrétisation systématique ( $N_x$  et  $N_z$  pairs).



**Figure 3.11:** Courbes de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane à incidence normale sur un réseau planaire de plaques métalliques déposées sur un substrat de permittivité  $\epsilon_r = 3,5$  et d'une épaisseur  $d = 0,2 \text{ cm}$ . Cas sans erreur de discrétisation effective ( $N_x$  et  $N_z$  impairs).



**Figure 3.12:** Courbes de réflexion et de transmission de puissance d'une onde plane à incidence normale sur un réseau planaire de plaques métalliques déposées sur un substrat de permittivité  $\epsilon_r = 3,5$  et d'une épaisseur  $d = 0,2$  cm. Cas avec erreurs de discrétisation systématique ( $N_x$  et  $N_z$  pairs).

## CHAPITRE 4

### ANALYSE DE RÉSEAUX PÉRIODIQUES D'ANTENNES PLAQUES

Après avoir analysé des surfaces à sélection de fréquences, nous allons à présent utiliser l'outil de calcul développé au chapitre 2 pour analyser des réseaux périodiques d'antennes plaques couplées par fente telles que décrites à la section 1.3 et dont la structure est illustrée à la figure 1.3. Nous traiterons d'abord en 4.1 le cas d'une excitation par source de tension idéale distribuée dans la fente, puis nous considérerons en 4.2 l'impédance d'entrée sur une ligne microruban alimentant la fente. La section 4.3 présente des exemples de distributions de champ électrique tangentiel et de densité de courant électrique obtenues.

Le système de coordonnées utilisé tout au long de ce chapitre est identique à celui employé au chapitre 3 et défini à la figure 1.3. L'angle  $\alpha$  correspond ici à l'angle entre le faisceau émis par le réseau d'antennes plaques et la normale à la surface de la structure. L'angle  $\psi$ , pour sa part, représente l'angle entre le plan d'incidence du faisceau et l'axe des  $x$ .

Pour toutes les simulations ayant servi au calcul des résultats affichés dans ce chapitre, la discrétisation des plaques est imparfaite. En effet, contrairement aux cas analysés au chapitre 3, les dimensions des plaques employées ici ne permettent pas de choisir des valeurs de  $N_x$  et  $N_z$  résultant en des dimensions effectives égales aux dimensions désirées. Même si les erreurs de discrétisation affectent la convergence, leurs effets s'atténuent avec le raffinement de la discrétisation et les résultats convergés sont aussi valables. Des précautions doivent toutefois être prises afin que les positions relatives des plaques et de la fente soient respectées, car il s'avère qu'une erreur sur les positions relatives de la fente et de la plaque nuit plus sévèrement à la convergence qu'une erreur sur les dimensions. Dans toutes les configurations considérées, les fentes et les plaques sont centrées dans la cellule. Pour limiter les erreurs

de discrétisation, nous choisissons pour  $N_x$  et  $N_z$  des valeurs telles qu'il soit possible de centrer la plaque métallique et la fente par rapport à la cellule, tout en autorisant des tailles effectives optimales pour chaque niveau de discrétisation, tel que discuté en 2.12.1.1 et en 2.12.1.2. Finalement, le critère de convergence employé lors du processus de résolution itérative du système d'équations est le *critère qualitatif* décrit à la section 2.11.3.1. Le *critère quantitatif* fonctionne relativement bien, mais il est parfois plus exigeant qu'il n'est nécessaire, ce qui a pour conséquence un allongement des temps de calcul. D'autre part, à d'autres moments il n'est pas suffisamment exigeant, ce qui résulte en un léger ronflement (bruit) des courbes tracées en fonction de la fréquence ou du balayage de phase.

#### 4.1 Source de tension idéale distribuée

Cette section se divise en deux parties. Nous expliquerons tout d'abord en 4.1.1 en quoi consiste la source de tension idéale distribuée. Puis, nous présenterons en 4.1.2 les résultats obtenus pour la réflexion d'une onde de puissance émise par une source de tension distribuée aux bornes d'une des fentes d'un réseau périodique d'antennes plaques alimentées par fentes.

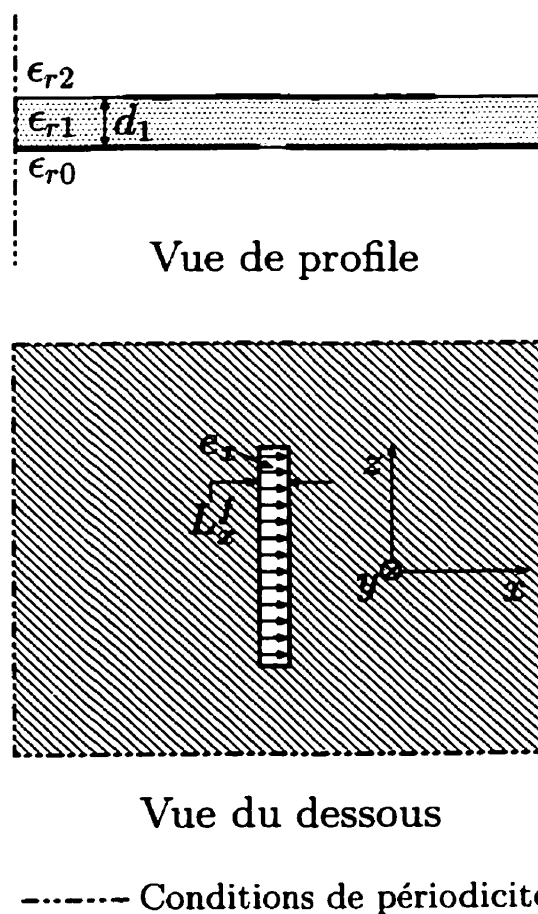
##### 4.1.1 Formulation de la source

Dans ce qui suit, nous allons analyser la variation d'impédance à l'entrée d'une fente alimentant l'une des antennes plaques d'un réseau périodique. Toutes les fentes sont alimentées simultanément par une source de tension distribuée d'égale amplitude et dont la phase varie linéairement avec la position, de façon à produire un faisceau principal orienté dans la direction désirée. La source considérée est simplement une source de tension idéale distribuée aux bornes de la fente (voir figure 4.1). Le champ électrique produit par cette source est orienté dans la direction de l'axe des  $x$ , c'est-à-dire dans le sens de la largeur de la fente; il a une valeur constante partout à

l'intérieur de la fente. Sa distribution peut formellement s'écrire :

$$e_x = \begin{cases} V_{source}/L_x^f & \text{dans la fente} \\ 0 & \text{hors de la fente} \end{cases} \quad (4.1)$$

Bien qu'une telle source ne soit pas réalisable physiquement, elle permet d'exciter simplement la structure afin d'en analyser les caractéristiques. Les résultats de simulation nous permettront de vérifier que le modèle élaboré au chapitre 2 permet de mettre en évidence des phénomènes connus comme l'excitation d'ondes de surfaces dans le substrat diélectrique et l'apparition de lobes discordants ; ces phénomènes sont indépendants de la nature des sources, pour autant qu'elles respectent



**Figure 4.1:** Source de tension idéale distribuée aux bornes d'une fente

les conditions aux frontières de périodicité. Nous nous attarderons à la formulation d'une source physique réalisable à la section 4.2.

Définissons l'impédance d'antenne  $Z_{ant}$  :

$$Z_{ant} = \frac{|V_{source}|^2}{P_{ant}^*} \quad (4.2)$$

où  $V_{source}$  est la tension de la source idéale distribuée produisant le champ dans la fente et  $P_{ant}$  est la puissance complexe produite par cette source dans la fente de chacun des éléments du réseau périodique. Cette puissance est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} P_{ant} &= \int_{S_{fente}} \mathbf{e}_z(x, z) h_x^*(x, z) - \mathbf{e}_x(x, z) h_z^*(x, z) dx dz \\ &\approx \left( \mathbf{E}_{z0}^{\ell} \cdot \mathbf{H}_{x0}^{\ell*} - \mathbf{E}_{x0}^{\ell} \cdot \mathbf{H}_{z0}^{\ell*} \right) \Delta_x \Delta_z \end{aligned} \quad (4.3)$$

où  $\mathbf{E}_{x0}^{\ell}$ ,  $\mathbf{E}_{z0}^{\ell}$ ,  $\mathbf{H}_{x0}^{\ell}$  et  $\mathbf{H}_{z0}^{\ell}$  sont les champs-solutions obtenus après l'excitation du système d'équations homogène (2.128) obtenu pour la structure représentée à la figure 4.1.

L'intérêt principal de la présente analyse est de connaître les variations relatives, lors d'un balayage de phase correspondant au déplacement du faisceau principal de l'incidence normale ( $\alpha = 0^\circ$ , excitation équiphasé) jusqu'à l'incidence rasante ( $\alpha = 90^\circ$ ) dans un plan donné ( $\psi$  fixé), du niveau de puissance que l'on peut rayonner à partir d'une source donnée. Ainsi, on peut adapter une source de façon à disposer d'une source équivalente produisant un transfert maximal de puissance à l'antenne pour un angle de balayage donné ; nous choisirons ici  $\alpha = 0^\circ$ . Pour que le transfert maximal de puissance se produise, il faut que l'impédance de source soit égale à la conjuguée de l'impédance d'antenne lorsque son faisceau pointe vers le haut ( $\alpha = 0^\circ$ ), ce qui s'écrit  $Z_s = Z_{ant}^*(\alpha = 0^\circ)$ . Le coefficient de réflexion l'onde de puissance  $\Gamma_P$ ,



tel que défini dans [8], devient donc :

$$\Gamma_P(\alpha) = \frac{Z_{ant}(\alpha) - Z_s^*}{Z_{ant}(\alpha) + Z_s} = \frac{Z_{ant}(\alpha) - Z_{ant}(0^\circ)}{Z_{ant}(\alpha) + Z_{ant}^*(0^\circ)} \quad (4.4)$$

La valeur de  $|\Gamma_P|^2$  correspond à la proportion de puissance réfléchie par l'antenne vers la source. Cette définition est utilisée par les auteurs de [16], [17] et [18], dont certains des résultats sont utilisés pour valider les résultats obtenus.

Les constantes de phase  $k_{x0}$  et  $k_{z0}$  utilisées pour la normalisation de phase (équations (2.31) à (2.34)) sont reliées aux angles  $\alpha$  et  $\psi$  comme suit :

$$k_{x0} = k_0 \sin \alpha \cos \psi \quad (4.5)$$

$$k_{z0} = k_0 \sin \alpha \sin \psi \quad (4.6)$$

où  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$  est le nombre d'onde dans le vide.

#### 4.1.2 Résultats et validation

Nous présentons ici les résultats obtenus pour la simulation de réseaux périodiques d'antennes plaques alimentées par des sources de tension idéales distribuées. Les résultats sont présentés sous forme de courbes donnant la valeur de l'amplitude du coefficient  $\Gamma_P$  de réflexion de l'onde de puissance en fonction de la direction de balayage du faisceau du réseau périodique d'antennes.

Trois configurations du réseau périodique sont considérées. Pour chacune de ces configurations, les figures correspondant aux balayages de phase selon les plans E ( $\psi = 0$ ), H ( $\psi = 90^\circ$ ) et D ( $\psi = 45^\circ$ ) sont tracées. Chaque figure illustre la convergence au moyen d'une superposition de courbes obtenues pour différents niveaux de discrétisation. De plus, des courbes tirées de [17] sont incluses dans ces figures pour confirmer la validité des courbes obtenues par la méthode des lignes. Il importe de noter, toutefois, que les simulations effectuées dans [17] concernent un type d'alimen-

tation différent de celui employé ici : il s'agit d'une excitation par sonde métallique verticale. Les similitudes observées permettent toutefois de confirmer que les caractéristiques principales des courbes de  $\Gamma_P$  sont liées à la structure du réseau d'antennes plutôt qu'au mode d'alimentation.

#### 4.1.2.1 Première configuration - substrat mince

Les figures 4.2 à 4.4 montrent les résultats obtenus pour l'amplitude du coefficient de réflexion  $\Gamma_P$  de l'onde de puissance émise par une source de tension distribuée aux bornes de chacune des fentes d'un réseau périodique d'antennes plaques. Ce réseau est déposé sur un substrat relativement mince ( $0,02\lambda_0$ ) de permittivité  $\epsilon_r = 12,8$ .

On constate que la convergence des résultats est très bonne pour tous les plans de balayage considérés (plans E,D et H), mais elle s'avère plus lente pour les angles de balayage près de l'incidence rasante ( $\psi = 90^\circ$ ). La comparaison avec les résultats tirés de [17] démontre la validité des résultats obtenus. De plus, elle illustre le fait que le coefficient  $\Gamma_P$  de réflexion de l'onde de puissance dépend plus de la structure du réseau d'antennes que de son mode d'alimentation.

À la figure 4.2, l'angle de balayage auquel se produit la réflexion totale de l'onde de puissance ( $\Gamma_P = 1$ ) correspond en fait à l'excitation du mode de propagation de surface  $TM_0$  du substrat diélectrique. Celle-ci se produit lorsque l'un des modes de Floquet émis par le réseau périodique a une constante de propagation égale à celle du mode  $TM_0$ . Sachant que nous avons un réseau périodique excité par des sources d'amplitudes égales mais dont la phase varie linéairement avec la position de façon à produire une onde plane fondamentale ayant pour constantes de propagation  $k_{x0}$  et  $k_{z0}$ , les constantes de propagation des modes de Floquet émis sont [17] :

$$k_{xm} = k_{x0} \pm k_0 \frac{m}{L_x/\lambda_0} \quad k_{zn} = k_{z0} \pm k_0 \frac{n}{L_z/\lambda_0} \quad (4.7)$$

Ainsi, le mode de surface  $TM_0$  sera excité lorsque :

$$k_x^2 + k_z^2 = k_{TM_0}^2$$

ou

$$\left( \sin \alpha \cos \psi \pm \frac{m}{L_x/\lambda_0} \right)^2 + \left( \sin \alpha \sin \psi \pm \frac{n}{L_z/\lambda_0} \right)^2 = \left( \frac{k_{TM_0}}{k_0} \right)^2 \quad (4.8)$$

où l'on a utilisé les équations (4.5) et (4.6). L'équation (4.8) permet de prédire, pour la configuration considérée aux figures 4.2 à 4.4 ( $\epsilon_r = 12,8$  et  $d = 0,02\lambda_0$ ), les valeurs des angles d'aveuglement correspondant à l'excitation du mode de surface. Pour ce faire, nous devons connaître la valeur de  $k_{TM_0}$ . Celle-ci est en fait la solution à l'équation transcendente suivante [1] :

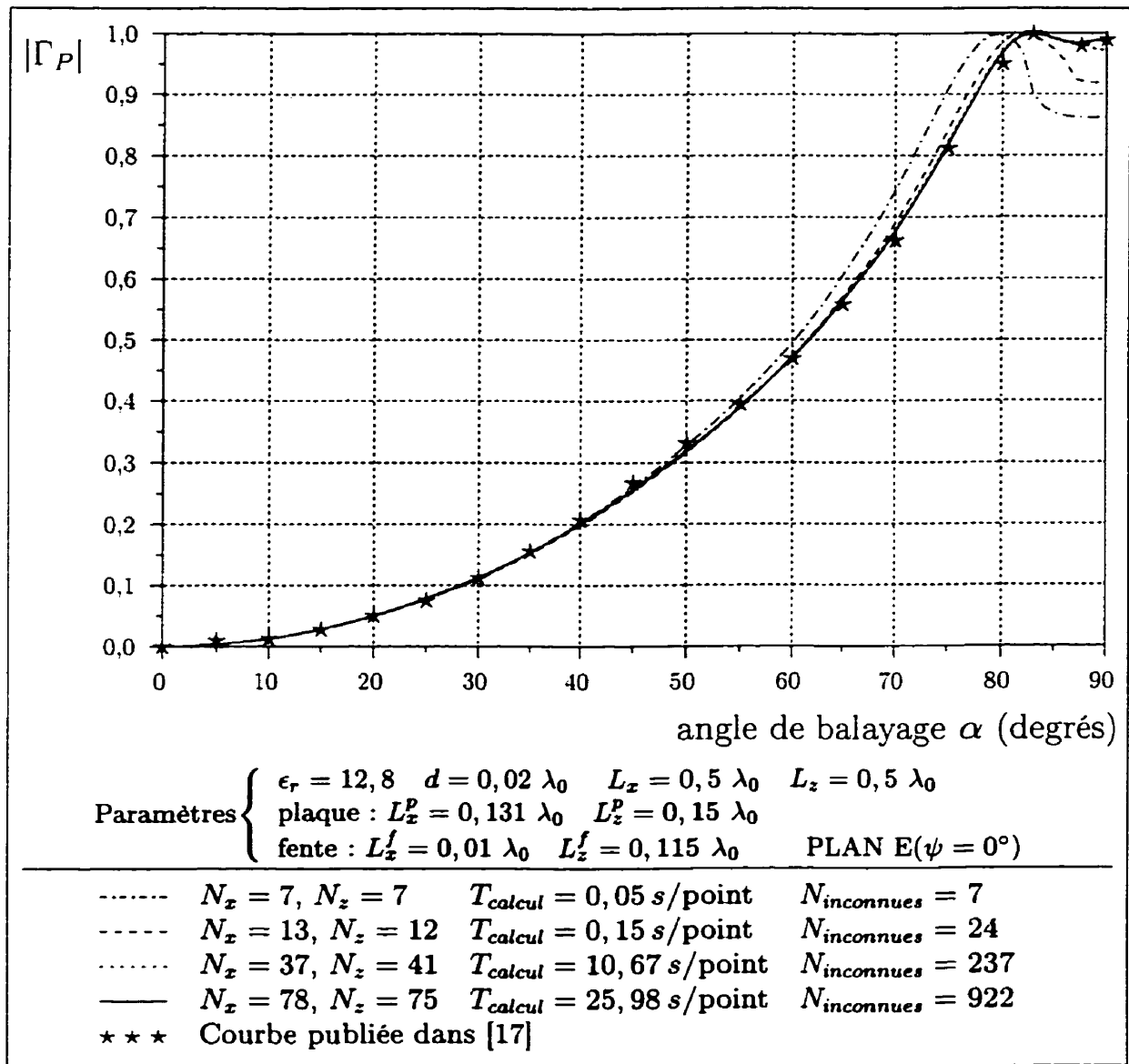
$$\sqrt{\epsilon_r - \left( \frac{k_{TM_0}}{k_0} \right)^2} \tan \left( k_0 \sqrt{\epsilon_r - \left( \frac{k_{TM_0}}{k_0} \right)^2} d \right) = \epsilon_r \sqrt{\left( \frac{k_{TM_0}}{k_0} \right)^2 - 1} \quad (4.9)$$

Sachant que la solution à cette équation pour le substrat considéré est  $|k_{TM_0}| = 1,0076k_0$ , on trouve pour les angles d'aveuglement :

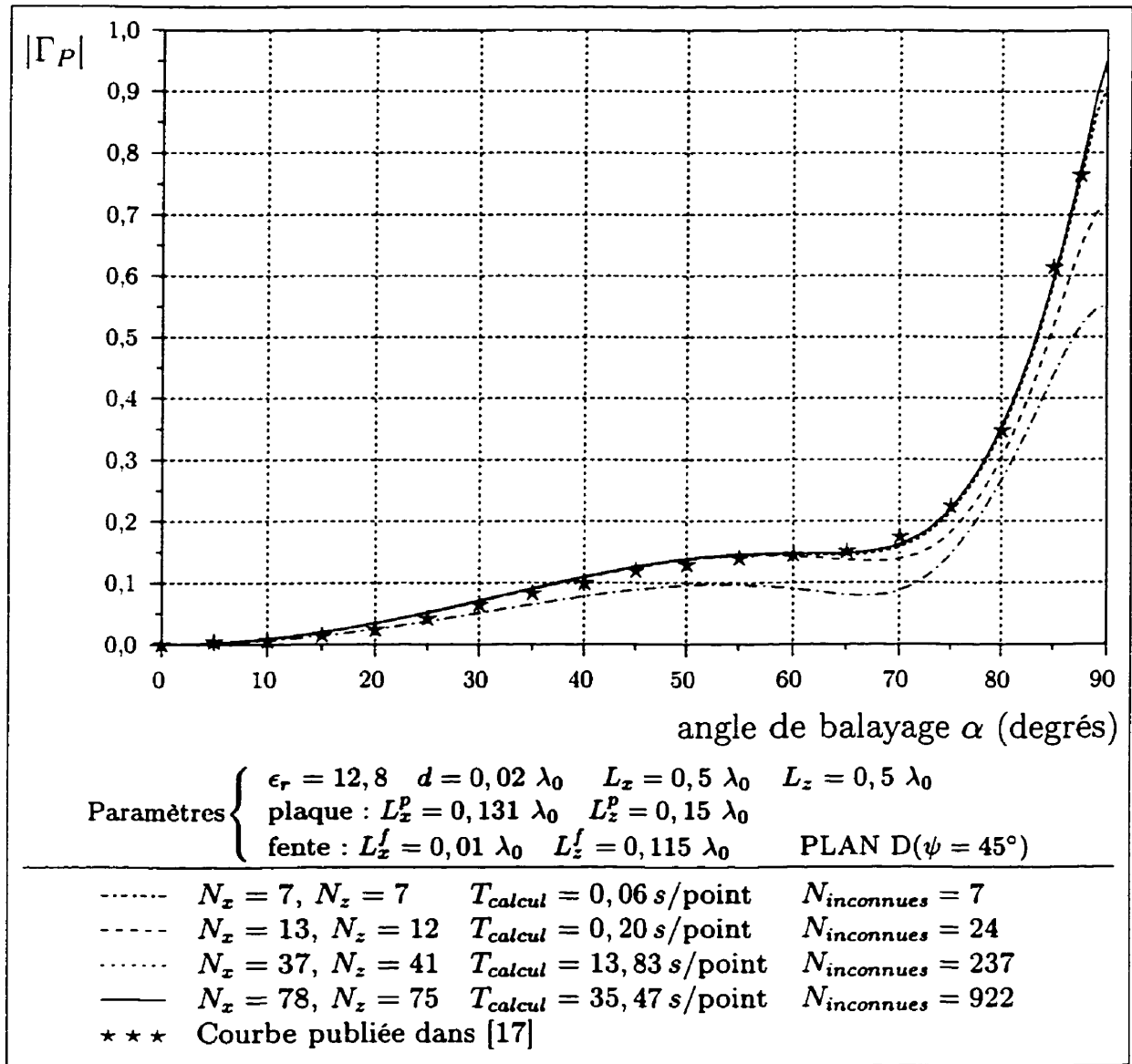
Plan E ( $\psi = 0^\circ$ ), $m = -1$	$\alpha_{TM_0} = 82,9^\circ$
Plan D ( $\psi = 45^\circ$ )	aucun angle d'aveuglement possible
Plan H ( $\psi = 90^\circ$ ), $m = -1$	$\alpha_{TM_0} = 82,9^\circ$

On constate qu'il y a effectivement, à la figure 4.2, une réflexion totale de l'onde de puissance dans le plan E en  $\alpha = 82,9^\circ$ . À la figure 4.4, toutefois, seuls les résultats de [17] présentent un aveuglement total à l'angle prédit. Ceci s'explique par le mode d'alimentation de l'antenne. En effet, étant donné que l'excitation produite par la source de tension idéale distribuée dans la fente est polarisée selon la direction de l'axe des  $x$ , il est normal que l'aveuglement total ne se produise pas puisque l'excitation d'une onde  $TM_0^z$  (voyageant selon la direction de l'axe des  $z$ ) n'est possible que si la composante  $e_z$  du champ électrique est non nulle en quelque part sous le diélectrique

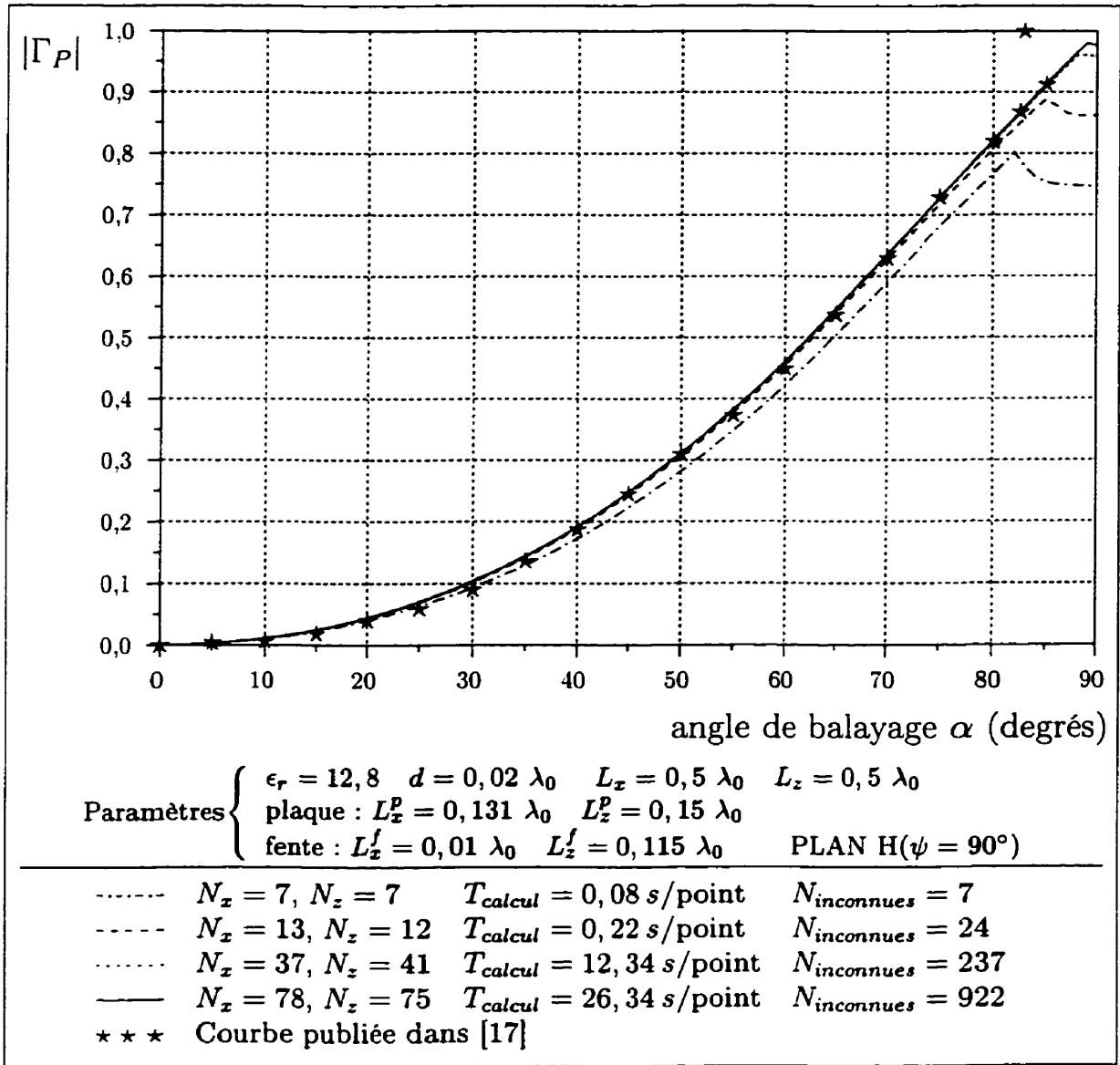
(voir [1], section 8.7). En fait, l'aveuglement total ne se produirait dans le plan H que si l'excitation dans la fente était polarisé *uniquement* selon  $z$ , car le mode  $TM_0^z$  a une composante de champ électrique  $e_z$  nulle, ce qui signifie qu'il ne peut canaliser la puissance produite par une source comprenant une polarisation selon  $x$ . Dans [17], la sonde d'alimentation applique un champ à symétrie cylindrique sur la structure, ce qui résulte en un couplage du mode  $TM_0$  quelle que soit la direction de balayage.



**Figure 4.2:** Courbes de l'amplitude du coefficient de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan E ( $\psi = 0^\circ$ ) pour le cas comportant un *substrat mince*. Résultat obtenu par la méthode des lignes avec 4 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [17].



**Figure 4.3:** Courbes de l'amplitude du coefficient de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan D ( $\psi = 45^\circ$ ) pour le cas comportant un *substrat mince*. Résultat obtenu par la méthode des lignes avec 4 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [17].



**Figure 4.4:** Courbes de l'amplitude du coefficient de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan H ( $\psi = 90^\circ$ ) pour le cas comportant un *substrat mince*. Résultat obtenu par la méthode des lignes avec 4 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [17].

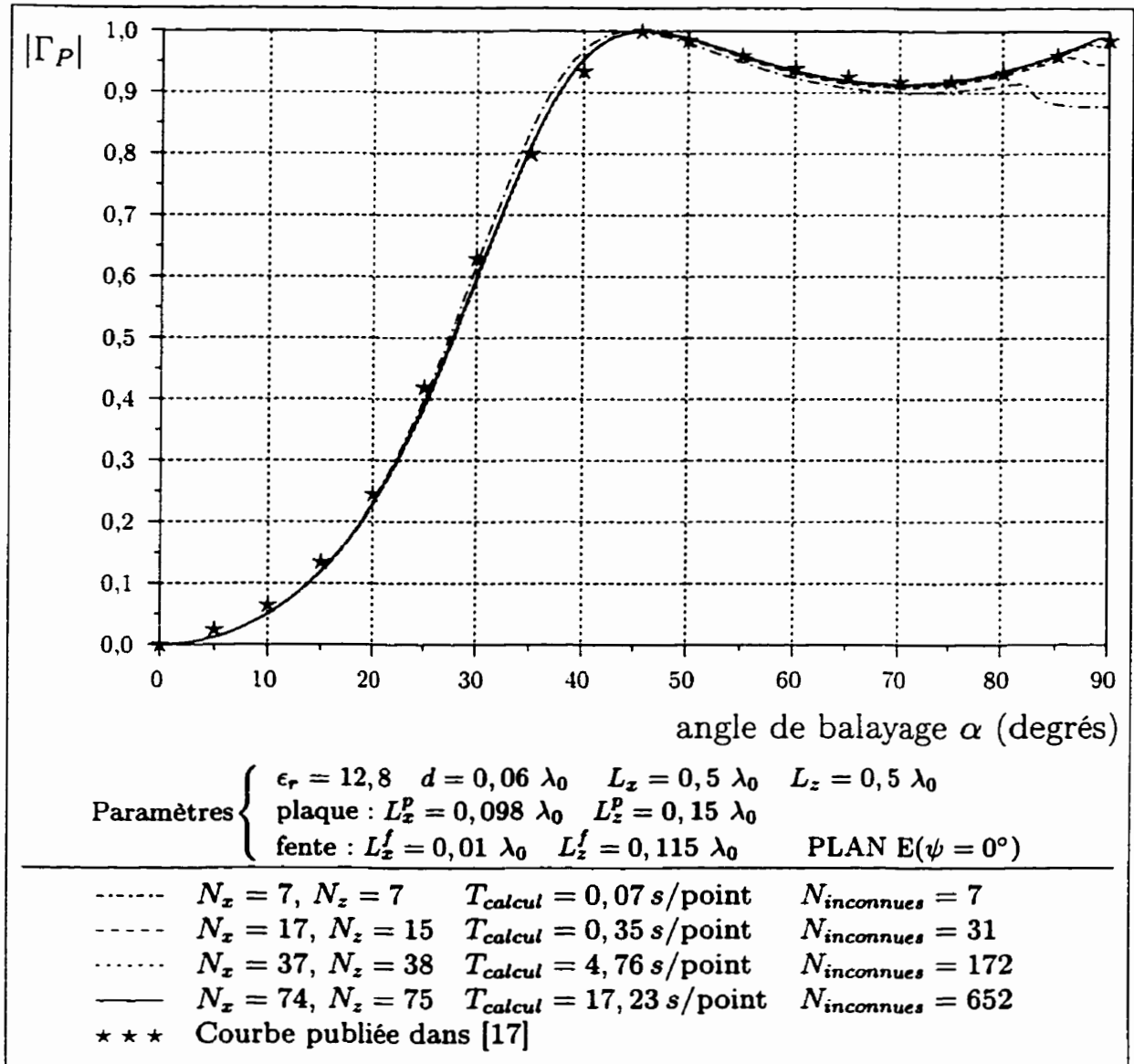
#### 4.1.2.2 Deuxième configuration - substrat épais

Les figures 4.5 à 4.7 montrent les résultats obtenus pour  $|\Gamma_P|$  en fonction de l'angle de balayage du faisceau de l'antenne dans chacun des plans E, D et H. La structure analysée est un réseau périodique composé d'antennes plaques de taille  $0,098\lambda_0 \times 0,15\lambda_0$  déposées sur un substrat de permittivité  $\epsilon_r = 12,8$  et d'épaisseur  $d = 0,06\lambda_0$ .

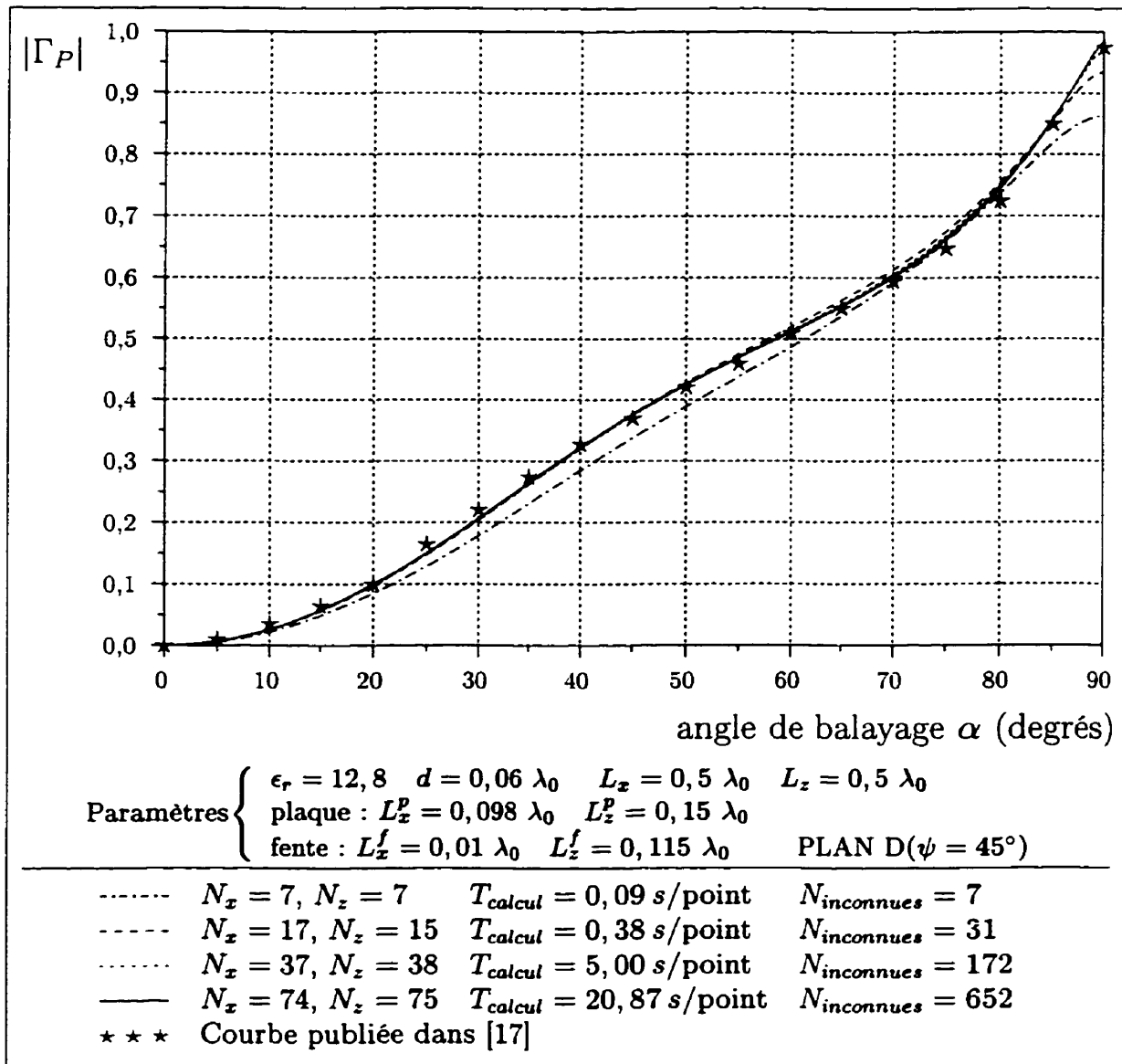
Le substrat employé ici est plus épais que celui employé pour la première configuration, ce qui explique que l'angle de réflexion totale associé à l'excitation du mode  $TM_0$  du substrat diélectrique se produise à un angle de balayage plus petit. Encore une fois, l'angle d'aveuglement est le même dans les plans E et H parce que les valeurs de  $L_x$  et  $L_z$  sont identiques. En employant la même approche que précédemment et sachant que  $k_{TM_0} = 1,2858k_0$  pour ce substrat, on arrive à prédire l'angle de réflexion totale pour les plans de balayage E et H :  $\alpha_{TM_0} = 45,6^\circ$ . C'est effectivement l'angle auquel on observe une réflexion totale dans le plan E. Comme nous l'avons expliqué à la section 4.1.2.1, l'aveuglement ne se produit pas dans le plan H étant donné le mode d'alimentation.

Encore une fois, la convergence des résultats est très satisfaisante pour les trois plans de balayage, sauf près de l'incidence rasante. C'est cette convergence lente en  $\alpha = 90^\circ$ , et non le couplage à un lobe discordant, qui est responsable de la valeur inférieure à 1 obtenue pour  $\Gamma_P$  à la figure 4.6 ; on peut constater que l'évolution des valeurs obtenues pour différents niveaux de discrétisation tend vers 1. La comparaison effectuées sur les figures avec les résultats de [17] confirme encore une fois la validité du modèle.

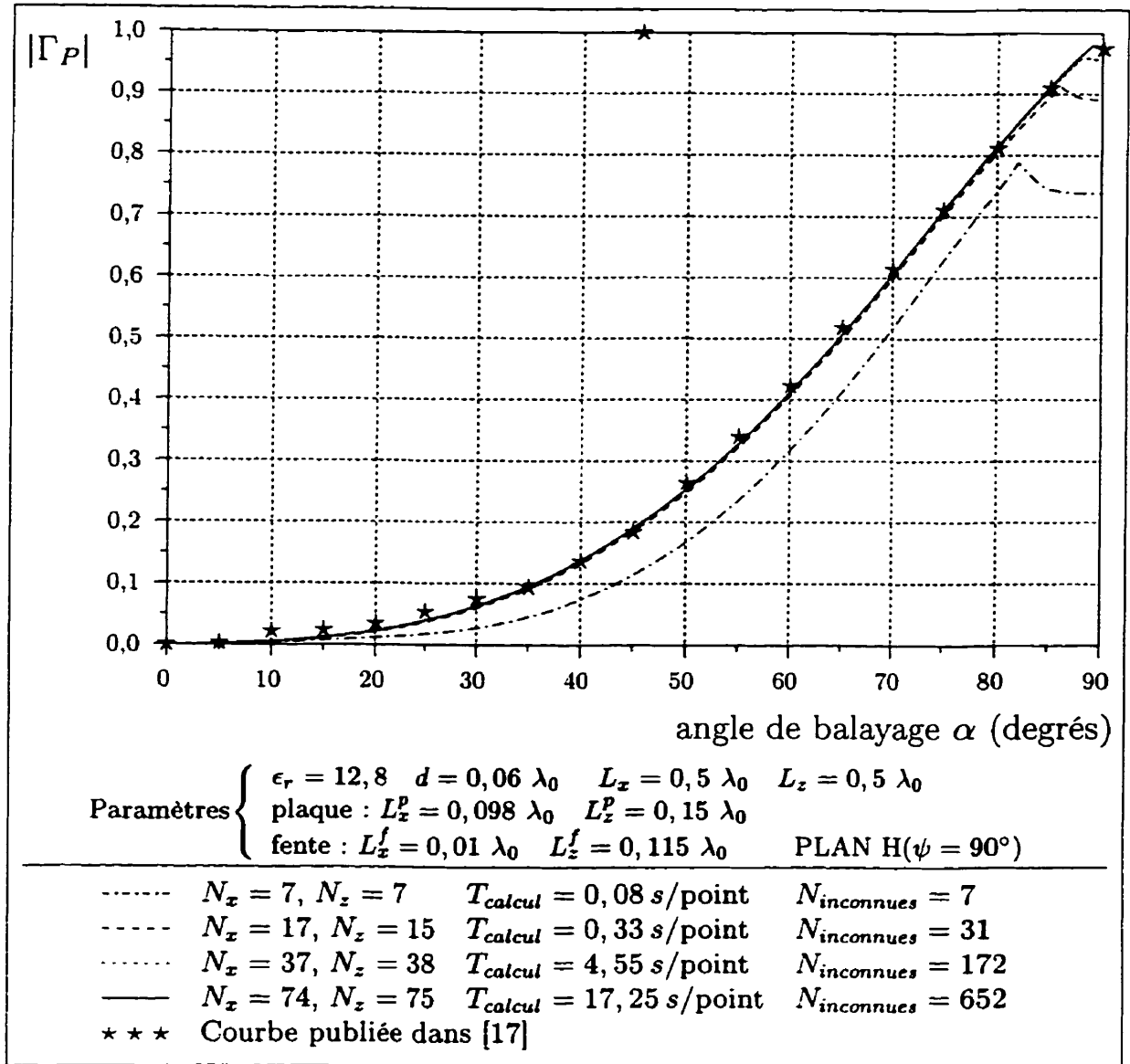




**Figure 4.5:** Courbes de l'amplitude du coefficient de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan E ( $\psi = 0^\circ$ ) pour le cas comportant un *substrat épais*. Résultat obtenu par la méthode des lignes avec 4 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [17].



**Figure 4.6:** Courbes de l'amplitude du coefficient de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan D ( $\psi = 45^\circ$ ) pour le cas comportant un *substrat épais*. Résultat obtenu par la méthode des lignes avec 4 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [17].



**Figure 4.7:** Courbes de l'amplitude du coefficient de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan H ( $\psi = 90^\circ$ ) pour le cas comportant un *substrat épais*. Résultat obtenu par la méthode des lignes avec 4 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [17].

#### 4.1.2.3 Troisième configuration - substrat épais et lobe discordant

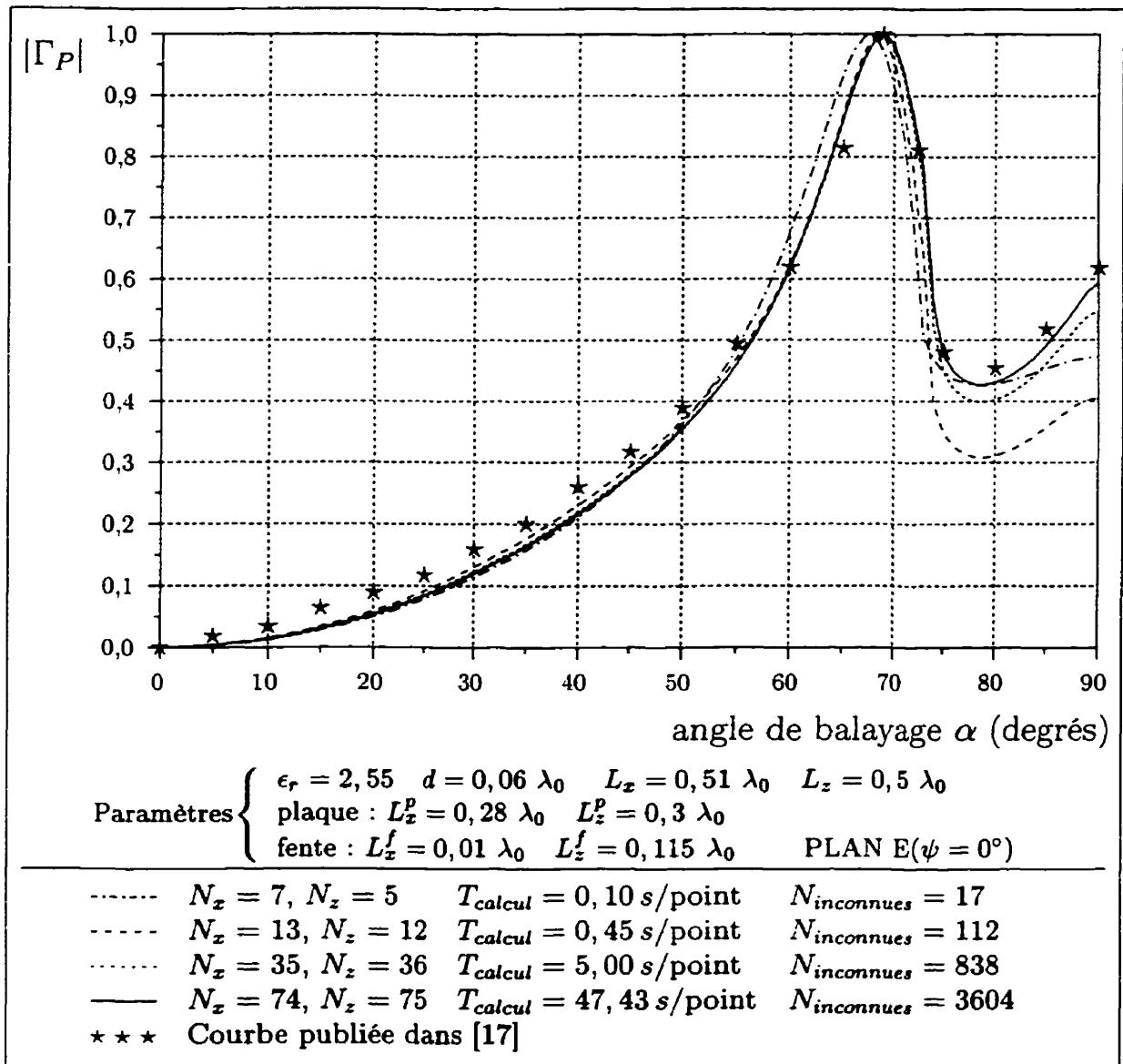
Les figures 4.8 à 4.10 donnent les résultats obtenus pour  $|\Gamma_P|$  pour les trois plans de balayage. Cette fois-ci, l'espacement  $L_x = 0,51\lambda_0$  entre les éléments est supérieur à la demi-longueur d'onde, ce qui autorise l'apparition de lobes discordants<sup>1</sup> dans l'espace visible [22]. Le fait que la réflexion de l'onde de puissance ne soit pas totale pour l'incidence rasante ( $\alpha = 90^\circ$ ) dans le plan E à la figure 4.8 confirme que le modèle tient compte du couplage aux lobes discordants. Lorsque le faisceau principal du réseau périodique est pointé à  $\alpha = 90^\circ$  dans le plan E, aucune puissance ne peut être émise dans cette direction ; la puissance est canalisée dans une autre direction, produisant un lobe discordant. C'est pourquoi  $|\Gamma_P| < 1$ . Dans le cas des résultats de la figure 4.10 concernant le balayage dans le plan H, on peut voir à partir de l'évolution des courbes correspondant aux niveaux de discrétisation successifs que la valeur légèrement inférieure à 1 obtenue pour le coefficient  $|\Gamma_P|$  est due à la non-convergence des résultats pour les angles d'incidence près de  $90^\circ$ .

Encore une fois, l'onde de surface associée au mode  $TM_0$  du substrat diélectrique de permittivité  $\epsilon_r = 2,55$  et d'épaisseur  $d = 0,06\lambda_0$  est excitée dans le plan E seulement, à cause du mode d'excitation. La solution de l'équation (4.9) nous donne la constante de propagation du mode  $TM_0$  :  $|k_{TM_0}| = 1,0279k_0$ . L'équation (4.8) nous donne ensuite l'angle prévu d'aveuglement total dans le plan E :  $\alpha_{TM_0} = 68,9^\circ$ . C'est effectivement à cet angle que l'on observe l'aveuglement total à la figure 4.8.

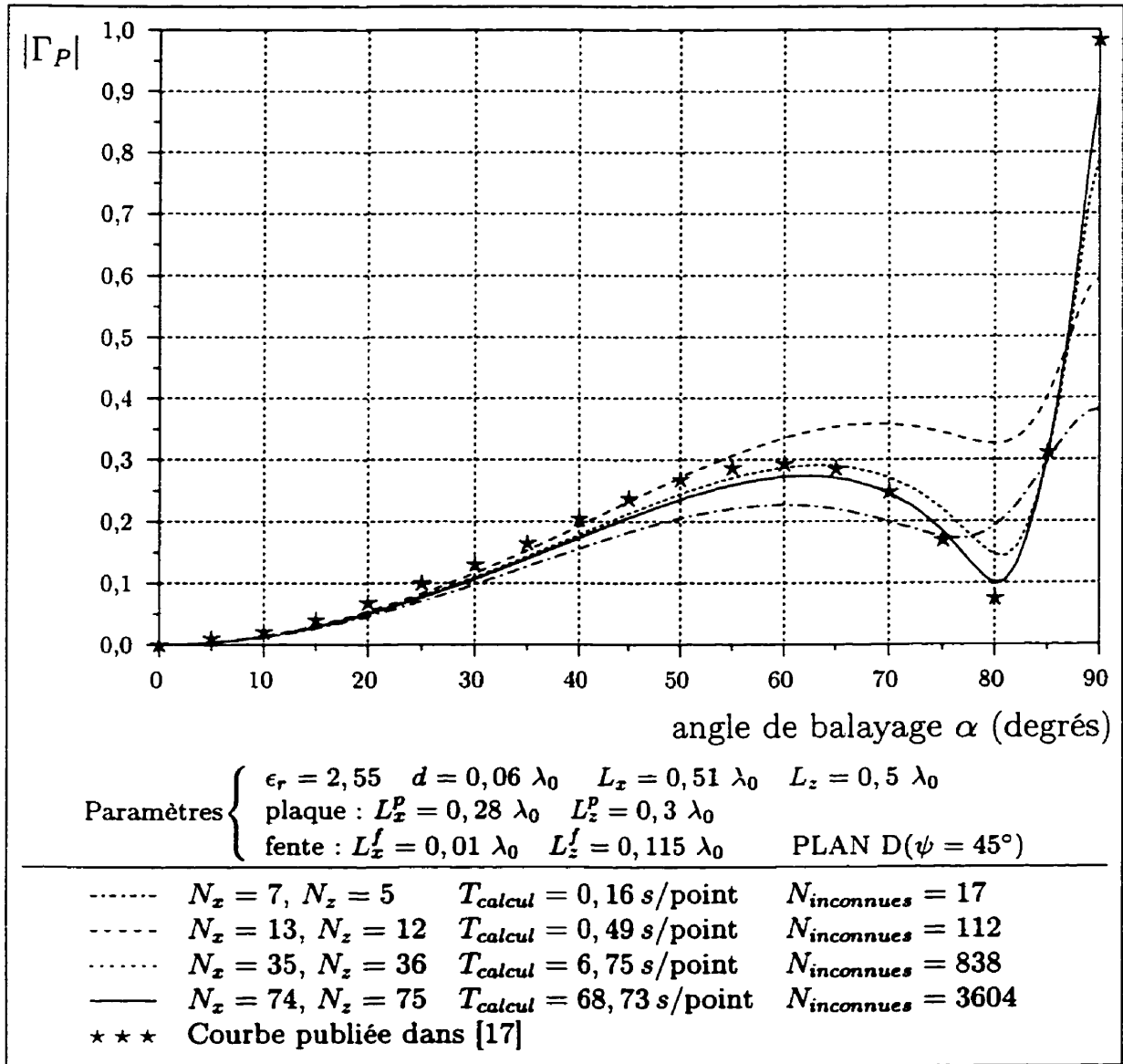
Finalement, on observe une bonne convergence des résultats pour les trois plans de balayage et les résultats de [17] confirment la validité du modèle pour un cas illustrant l'excitation d'une onde de surface et d'un lobe discordant.

---

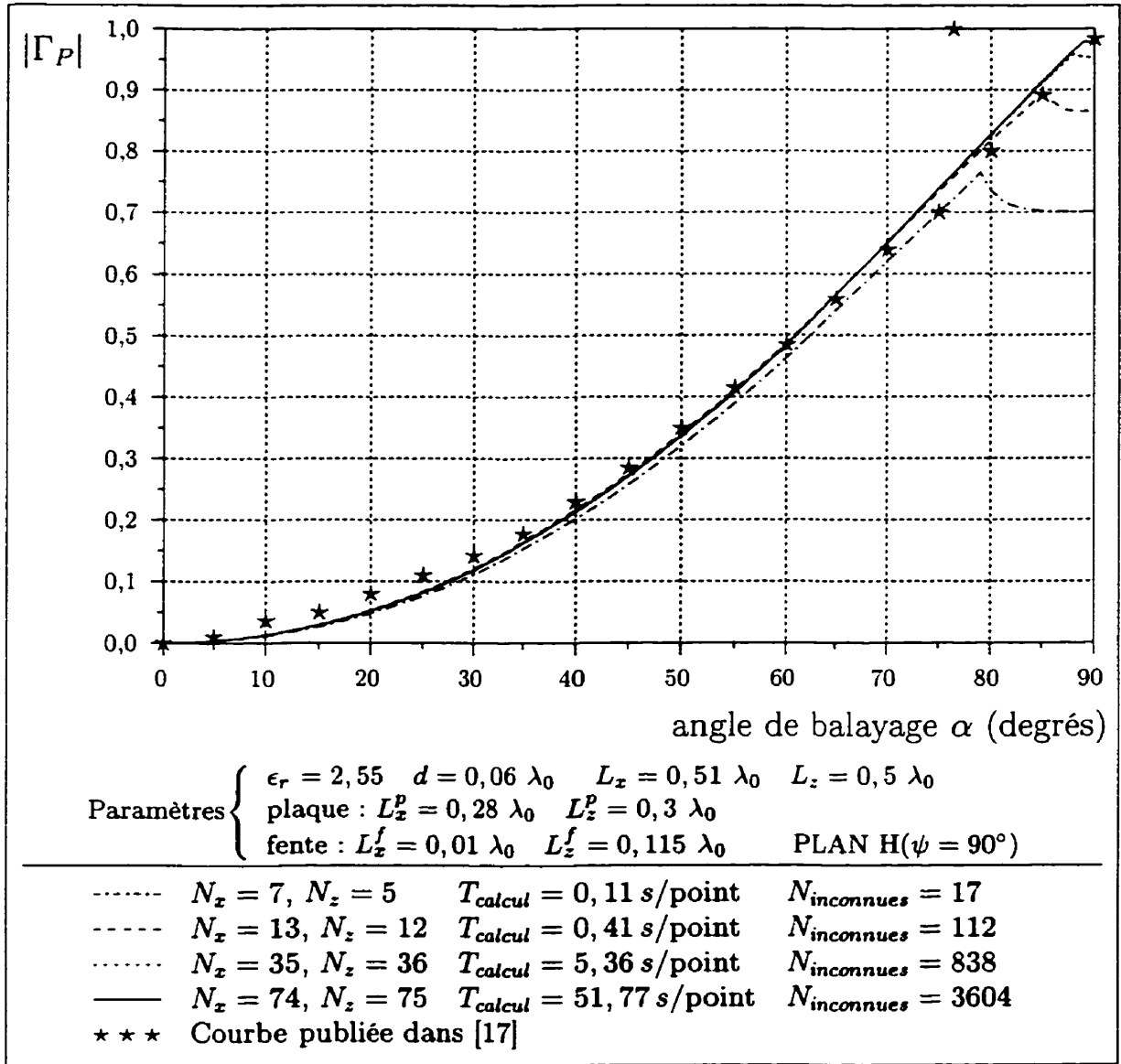
<sup>1</sup>Mieux connus sous le nom *lobes de grating*



**Figure 4.8:** Courbes de l'amplitude du coefficient de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan E ( $\psi = 0^\circ$ ) pour le cas comportant un *substrat épais* et le couplage d'un lobe discordant. Résultat obtenu par la méthode des lignes avec 4 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [17].



**Figure 4.9:** Courbes de l'amplitude du coefficient de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan D ( $\psi = 45^\circ$ ) pour le cas comportant un *substrat épais* et le couplage d'un lobe discordant. Résultat obtenu par la méthode des lignes avec 4 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [17].

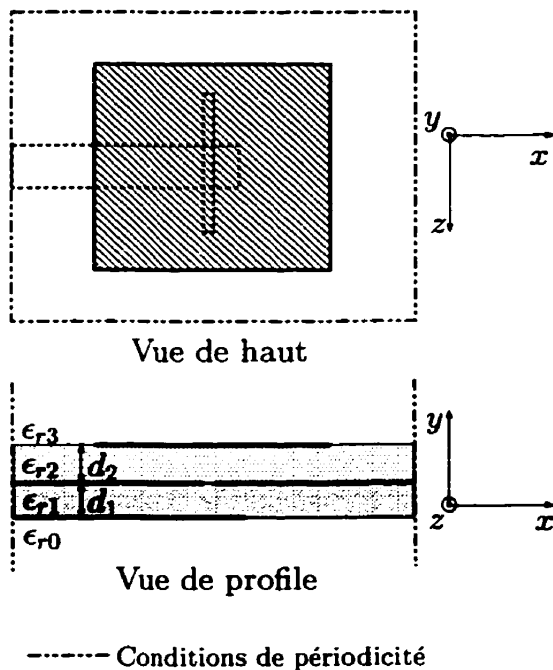


**Figure 4.10:** Courbes de l'amplitude du coefficient de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan H ( $\psi = 90^\circ$ ) pour le cas comportant un *substrat épais* et le couplage d'un lobe discordant. Résultat obtenu par la méthode des lignes avec 4 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point (en secondes) et nombre d'inconnues. Validation avec [17].

## 4.2 Alimentation par fentes couplées

Un des modes d'alimentations des antennes plaques les plus utilisés est le couplage par fente à partir d'une ligne microruban. La fente est pratiquée dans le plan de masse sous le diélectrique supportant la plaque, tandis qu'une ligne microruban imprimée sous un diélectrique collé au même plan de masse excite la fente. La figure 4.11 illustre ce mode d'alimentation pour l'une des cellules de la structure périodique en question. L'approche consistant à inclure la ligne microruban dans l'analyse de la structure périodique avec la méthode des lignes n'a pas été choisie parce que l'application des conditions aux frontières de périodicité ne permet pas de représenter une ligne microruban se poursuivant hors de la cellule périodique.

Dans cette section, nous présenterons en 4.2.1 une adaptation d'une technique employant la réciprocité et présentée par l'auteur de [15] servant à modéliser une fente couplée par une ligne microruban au moyen d'une impédance série placée sur



**Figure 4.11:** Antenne plaque couplée par fente constituant l'un des éléments d'un réseau périodique.

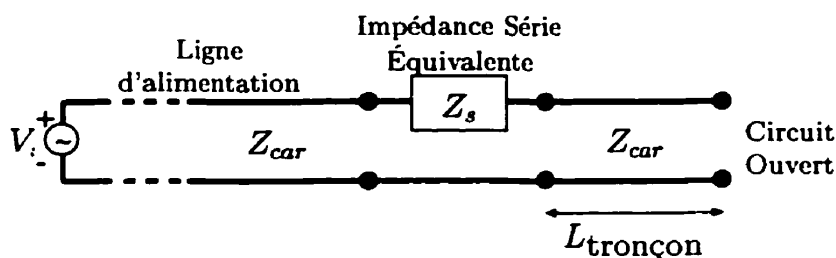


la ligne. Cette adaptation a été développée dans le cadre de ce projet pour l'emploi avec la méthode des lignes. Puis, nous présenterons en 4.2.2 les résultats de simulation utilisant cette technique et les comparerons aux mesures expérimentales et aux résultats de simulation publiés et basés sur d'autres méthodes d'analyse.

#### 4.2.1 Formulation de la source par la méthode de réciprocité

La technique développée ici, basée sur l'utilisation du principe de réciprocité, est inspirée de [7] et de [15]. Elle a pour but de modéliser le couplage d'une fente à une ligne microruban sous forme d'une impédance série le long d'une ligne microruban. La variation des dimensions de la fente sert à agir sur le niveau de couplage entre la ligne et la fente et ainsi à ajuster la partie réelle de l'impédance série équivalente. L'ajout d'un tronçon de ligne en circuit ouvert à la suite de l'impédance série, tel qu'illustré à la figure 4.12, permet d'ajuster la réactance vue à l'entrée du circuit par la ligne microruban.

Afin d'obtenir la valeur de l'impédance série équivalente, nous considérons une ligne microruban de longueur infinie dans la direction de l'axe des  $x$ , puisque la fente est orientée selon l'axe des  $z$ . Les champs et les courants le long de la ligne microruban n'étant pas périodiques, il n'est pas possible d'inclure la partie métallique de la ligne dans l'analyse employant la méthode des lignes. En effet, l'ensemble de la structure est alors assujetti aux conditions de périodicité. C'est pourquoi nous



**Figure 4.12:** Circuit équivalent d'une fente couplée à une ligne microruban (figure inspirée de [16])

substituerons l'action de la ligne microruban par une source de courant électrique équivalente localisée dans la fente pratiquée dans le plan de masse. La réaction à ce courant, sous forme d'un champ électrique dans la fente, pourra ensuite être obtenue au moyen de l'analyse présentée au chapitre 2. Le principe de réciprocité permet, à partir de cette réaction, de déduire l'impédance série équivalente le long de la ligne microruban. Cette approche est basée sur l'approximation simplificatrice suivante : les lignes microruban servant à exciter les fentes ne sont pas couplées entre elles et ne participent pas à la diffraction des champs périodiques. Cette approximation se justifie par la petite taille des lignes et par le fait qu'elles sont relativement éloignées les unes des autres.

#### 4.2.1.1 Application du principe de réciprocité

Dans ce qui suit, nous supposons que seul le mode fondamental de la ligne microruban se propage le long de la ligne, ce qui est très raisonnable car en pratique on cherche toujours à respecter cette condition. De plus, on supposera que le mode fondamental est à toutes fins pratiques transverse électromagnétique (quasi-TEM). En prenant comme référence de phase la position de la fente en  $x = x_f$ , les champs électromagnétiques transversaux du mode fondamental pour une ligne orientée selon l'axe des  $x$  sont donc, au niveau de la fente :

$$\vec{e}^{mic}(y, z) = e_y^{mic}\hat{y} + e_z^{mic}\hat{z} \quad (4.10)$$

$$\vec{h}^{mic}(y, z) = h_y^{mic}\hat{y} + h_z^{mic}\hat{z} \quad (4.11)$$

où  $\vec{e}^{mic}(y, z)$  et  $\vec{h}^{mic}(y, z)$  sont normalisés de sorte que le mode fondamental porte une puissance de 1 W :

$$\int_{S_o} \left( \vec{e}^{mic} \times \vec{h}^{mic*} \right) \cdot \hat{x} ds = 1 \text{ W} \quad (4.12)$$

où  $S_o$  représente la section de la ligne microruban.

Si on suppose que les champs électromagnétiques le long de la ligne sont composés uniquement d'une superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie ayant la forme du mode fondamental, les champs électromagnétiques le long de la ligne peuvent s'écrire :

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{e}^{mic}(y, z)e^{-\beta_{mic}(x-x_f)} + R\vec{e}^{mic}(y, z)e^{\beta_{mic}(x-x_f)}, & \text{pour } x \leq x_f \\ T\vec{e}^{mic}(y, z)e^{-\beta_{mic}(x-x_f)}, & \text{pour } x \geq x_f \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\vec{H} = \begin{cases} \vec{h}^{mic}(y, z)e^{-\beta_{mic}(x-x_f)} - R\vec{h}^{mic}(y, z)e^{\beta_{mic}(x-x_f)}, & \text{pour } x \leq x_f \\ T\vec{h}^{mic}(y, z)e^{-\beta_{mic}(x-x_f)}, & \text{pour } x \geq x_f \end{cases} \quad (4.14)$$

où  $R$  et  $T$  sont les coefficients de réflexion et de transmission de part et d'autre de la fente centrée en  $x = x_f$ , tandis que  $\beta_{mic}$  est la constante de propagation du mode fondamental de la ligne microruban.

En considérant une ligne microruban infinie (de  $x \rightarrow -\infty$  à  $x \rightarrow \infty$ ) et en appliquant le théorème de réciprocité pour mettre en relation les champs totaux et les champs du mode microruban, l'auteur de [15] arrive à exprimer le coefficient de réflexion  $R$  en termes du champ électrique (la solution de l'analyse avec la méthode des lignes) dans la fente et du champ magnétique transverse produit dans le plan de masse par le mode fondamental sur une ligne microruban. De plus, en négligeant le déphasage sur la largeur de la fente (puisque'elle est très étroite par rapport à la longueur d'onde), on peut démontrer que  $T = 1 - R$ . En réécrivant le résultat de [15] selon notre système de coordonnées, on obtient pour le coefficient de réflexion  $R$  :

$$R = -\frac{1}{2} \int_{S_f} e_x^f(x, z) h_z^{mic}(z) dx dz \quad (4.15)$$

où  $e_x^f(x, z)$  est la composante  $x$  du champ électrique dans la fente et  $S_f$  est la surface de la fente.

#### 4.2.1.2 Caractérisation du mode fondamental d'une ligne microruban

Le calcul du coefficient de réflexion par la technique de réciprocité demande une connaissance préalable des caractéristiques du mode fondamental de la ligne microruban employée. Plus particulièrement, il demande la connaissance de la distribution de champ magnétique transversal à la ligne dans le plan de masse ( $h_z^{mic}$  à l'équation (4.15)) ainsi que de l'impédance caractéristique du mode fondamental et de la constante de propagation de ce mode, comme nous le verrons plus loin.

Certaines formules empiriques permettent de calculer une approximation des paramètres comme l'impédance caractéristique et la constante de propagation. Par contre, le calcul du champ magnétique dans le plan de masse demande un outil précis. Plutôt que d'utiliser des distributions approchées, il a été décidé de développer et d'inclure dans le simulateur un module spécialisé dédié à la caractérisation bi-dimensionnelle de lignes microruban.

Pour ce faire, la méthode des lignes a été employée, cette fois-ci en utilisant une approche classique impliquant la construction de matrices pleines et la résolution de systèmes d'équations par décomposition LU ; pour les problèmes bi-dimensionnels comme celui-ci, cela ne pose pas de problème de taille mémoire ni de temps de calcul. Le modèle est basé sur l'approche présentée dans [19], c'est pourquoi il ne sera pas développé ici. Nous ne mentionnerons que les points cruciaux ayant guidé la mise en application de cette méthode.

**4.2.1.2.1 Conditions aux frontières et discrétisation** Nous avons tiré profit de la symétrie du problème en simulant la moitié du guide microruban et en plaçant un mur magnétique en son centre. Une condition absorbante est définie au-dessus de la ligne microruban, et la structure est placée entre des murs électriques latéraux. Durant le processus de calcul, ces murs sont éloignés jusqu'à la convergence de la constante de propagation. Une discrétisation non uniforme a été employée afin d'accélérer la convergence. Cette dernière consiste en un espacement uniforme des lignes

sur la ligne microruban et sur une distance égale à sa largeur au-delà de la ligne, suivi d'un espacement augmentant de façon géométrique ; afin d'obtenir une bonne convergence, il a été déterminé par essais et erreurs que la valeur maximale de la puissance  $n$  de cette progression géométrique de la forme  $ax^n$  est de 1,3.

**4.2.1.2.2 Calcul de la constante de propagation** Pour calculer la valeur de la constante de propagation (ou de la permittivité effective) de la ligne, il suffit de faire une recherche de zéro du déterminant de la matrice du système d'équations homogène reliant les inconnues du système (ici, les échantillons de courant sur la ligne) entre eux. Un processus automatique de recherche de convergence a été développé. Il peut se résumer à l'algorithme suivant :

1. Fixer un nombre de lignes initial passant par le ruban métallique ;
2. TANT QUE la permittivité effective n'a pas convergé,
  - (a) Fixer la distance initiale du mur électrique latéral (le mur magnétique de symétrie demeure immobile) ;
  - (b) TANT QUE la permittivité effective n'a pas convergé avec l'augmentation de la distance du mur électrique latéral,
    - i. Calculer la permittivité effective (recherche de zéro du déterminant de la matrice) ;
    - ii. Augmenter la distance du mur électrique latéral ;
  - (c) Augmenter le nombre de lignes passant par le ruban métallique ;

Les tests de convergence effectués par ce processus automatique ont été réglés de sorte que l'erreur sur la valeur obtenue de la constante de propagation soit de l'ordre de 0,1 % ; en pratique, ceci signifie que le processus itératif se termine lorsque l'écart relatif entre deux valeurs successives est inférieur à 0,1 %.

#### **4.2.1.2.3 Calcul de l'impédance caractéristique du mode fondamental**

Le calcul de l'impédance caractéristique est effectué selon l'approche utilisant le cou-

rant sur la ligne. Lorsque la constante de propagation est obtenue, les distributions de champs et de courant correspondantes sont calculées, puis normalisées de façon à obtenir une puissance guidée de 1 W, pour obéir à (4.12); pour ce faire, on doit intégrer le vecteur de Poynting sur la section du guide tel qu'expliqué à l'annexe E de [19].

On doit ensuite procéder à l'intégration du courant circulant sur le ruban métallique pour obtenir le courant total servant au calcul d'impédance. Toutefois, les singularités de courant présentes sur les bords du ruban sont difficilement intégrables à partir des échantillons de la méthode des lignes. En pratique, cela signifie qu'il faudrait un très grand nombre de ligne sur le ruban pour obtenir une valeur de courant total convergée. Nous avons contourné ce problème en utilisant la seconde équation de Maxwell sous forme intégrale :

$$\iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} - j\omega\epsilon_r\epsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.16)$$

Si on choisit pour la surface  $S$  toute la section du guide, partant du plan de masse jusqu'à une hauteur infinie et allant d'un mur électrique latéral à l'autre, on peut considérer comme nulle la contribution du premier terme du membre de droite sur les deux murs électriques latéraux, qui sont très loin, et sur le «plafond» placé à une distance infinie. L'intégrale sur  $\mathbf{H}$  peut donc se ramener à l'intégrale du courant de surface dans le plan de masse. Si la ligne microruban est orienté selon l'axe des  $z$ <sup>2</sup>, les simplifications nous permettent d'écrire :

$$I_z^{ruban} = \int_x J_z^{ruban} dx = - \left( \underbrace{\int_x J_z^{masse} dx}_{I_z^{masse}} + j\sqrt{\epsilon_r} \frac{k_0}{\eta_0} \underbrace{\int_x \int_y E_z dx dy}_{I_z^{déplacement}} \right) \quad (4.17)$$

<sup>2</sup>le système de coordonnées utilisé pour la caractérisation d'une ligne microruban est différent de celui utilisé pour le reste de cet ouvrage

On peut ainsi obtenir le courant total sur le ruban par la somme du courant dans le plan de masse et du courant de déplacement intégré sur la section totale du guide. Les densités linéiques de courant dans le plan de masse  $J_z^{masse}$  et de courant de déplacement  $\int_y E_z dy$  (intégrable analytiquement grâce à la formulation de la méthode des lignes) ont des distributions plus douces et, surtout, sont intégrées sur la totalité de la largeur de l'intervalle formé par les murs électrique et magnétique latéraux. Ceci a pour conséquence une convergence beaucoup plus rapide du courant  $I_z^{ruban}$  et par conséquent de l'impédance caractéristique. Cette dernière est calculée par :

$$Z_{car} = \frac{\text{Puissance guidée}}{|I_z^{ruban}|^2} = \frac{1 W}{|I_z^{ruban}|^2} \quad (4.18)$$

La valeur utilisée pour la puissance guidée (1 W) découle de la normalisation des champs décrite plus haut.

#### 4.2.1.3 Continuité du champ magnétique tangentiel dans la fente

La continuité du champ magnétique tangentiel dans la fente doit toujours être assurée, même en présence d'une ligne microruban. Conformément à la notation définie au chapitre 2, la ligne microruban est placée à l'interface numéro 0, tandis que la fente se trouve à l'interface numéro 1. En employant la notation de la figure 1.1, la condition frontière que doit respecter le champ magnétique à l'interface numéro 1 peut s'écrire sous forme discrétisée :

$$\mathbf{H}_{2A}^{tan} = \mathbf{H}_{1B}^{tan} - \mathbf{J}_1^{tan} + \underbrace{\mathbf{H}_{1BF}^{tan}}_{\mathbf{J}_1^{tan'}} = \mathbf{H}_{1B}^{tan} - \underbrace{(\mathbf{J}_1^{tan} - \mathbf{H}_{1BF}^{tan})}_{\mathbf{J}_1^{tan''}} \quad (4.19)$$

où  $\mathbf{J}_1^{tan}$  est la densité de courant tangentiel voyageant dans le plan de masse (elle est nulle dans la fente) et où les quantités  $\mathbf{H}_{2A}^{tan}$  et  $\mathbf{H}_{1B}^{tan}$  représentent le champ magnétique tangentiel aux interfaces 1B (sous le plan de masse) et 2A (au-dessus du plan de masse), produit par tous les courants induits de la structure, à l'exception des

courants circulant sur la ligne microruban.  $\mathbf{H}_{1B_F}^{tan}$  représente la portion du champ magnétique tangentiel dans la fente produite par le courant sur la ligne microruban. Sa distribution est celle du champ magnétique tangentiel produit par une ligne microruban sur la portion d'un plan de masse correspondant à la fente. Comme le montre l'équation (4.19), on peut combiner le courant  $\mathbf{J}_1^{tan}$ , qui est nul dans la fente, et le champ magnétique  $\mathbf{H}_{1B_F}^{tan}$ , qui est nul hors de la fente, pour former un ensemble noté  $\mathbf{J}_1^{tan''}$ , une densité de courant équivalente. Étant donné que le mode fondamental est quasi-TEM, le vecteur  $\mathbf{H}_{1B_F}^{tan}$  ne contient que la composante  $z$  du champ magnétique du mode fondamental, la composante  $x$  étant nulle. On peut assimiler  $\mathbf{H}_{1B_F}^{tan}$  à une densité de courant  $\mathbf{J}_1^{tan'}$  qui constituera l'excitation du système homogène formulé au chapitre 2.

#### 4.2.1.4 Calcul du coefficient de réflexion devant la fente

Nous allons à présent développer une expression nous permettant de calculer, à partir des champs discrétisés, le coefficient de réflexion au niveau de la fente subi par une onde incidente sur la ligne microruban. La discrétisation de (4.15) nous permet d'obtenir :

$$R = -\frac{1}{2}\Delta_x\Delta_z\mathbf{E}_{z1B_{tot}}^\ell \cdot \mathbf{H}_{z1B_F}^{\ell mic} \quad (4.20)$$

où  $\mathbf{H}_{z1B_F}^{\ell mic}$  provient de la discrétisation de  $h_z^{mic}(z)$  et n'a pas de variation selon la largeur de la fente. L'indice *tot* signifie qu'on considère la réponse du système à une excitation simultanée des ondes incidente et réfléchie sur la ligne microruban. La solution pour le champ total  $\mathbf{E}_{z1B_{tot}}^\ell$  correspond à celle obtenue lorsque le système homogène (2.128) est excité par une densité de courant  $(1 - R)\mathbf{H}_{z1B_F}^{\ell mic}$  dans la fente, c'est-à-dire la portion de la composante  $z$  du champ magnétique total dans la fente produite par le courant sur la ligne microruban. Puisque l'on ne connaît pas, a priori, la valeur de  $R$ , on excitera le système homogène avec une densité de courant



égale à  $\mathbf{H}_{z1B_F}^{\ell mic}$ , ce qui nous donnera une réponse rectifiée en conséquence :  $\mathbf{E}_{x1B}^{\ell} = \frac{1}{1-R} \mathbf{E}_{x1B_{tot}}^{\ell}$ . À partir de ces observations, on peut réécrire (4.20) en fonction de la réponse du système  $\mathbf{E}_{x1B}^{\ell}$  effectivement obtenue lors de l'excitation du système homogène par une densité de courant égale à  $\mathbf{H}_{z1B_F}^{\ell mic}$  :

$$\begin{aligned} \frac{R}{1-R} &= -\frac{1}{2} \Delta_x \Delta_z \mathbf{E}_{x1B}^{\ell} \cdot \mathbf{H}_{z1B_F}^{\ell mic} \\ \text{d'où} \\ R &= \frac{\Delta_x \Delta_z \mathbf{E}_{x1B}^{\ell} \cdot \mathbf{H}_{z1B_F}^{\ell mic}}{\Delta_x \Delta_z \mathbf{E}_{x1B}^{\ell} \cdot \mathbf{H}_{z1B_F}^{\ell mic} - 2} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Cette formulation nous permet donc d'adapter encore une fois la nature du problème considéré à la contrainte du modèle développé au chapitre 2, à savoir la nécessité de formuler les sources comme des sources idéales (sans impédance) de champ électrique ou de densité de courant électrique. Il suffit donc d'imposer une source idéale de densité de courant électrique  $\mathbf{J}_{x1}^{\ell} = -\mathbf{H}_{z1B_F}^{\ell mic}$  dans la fente à l'interface 1 (le courant sur le plan de masse à l'extérieur de la fente demeure libre) puis d'utiliser (4.21) afin de calculer le coefficient de réflexion  $R$ .

#### 4.2.1.5 Calcul de l'impédance série sur la ligne microruban et ajout d'un tronçon de ligne

La valeur de  $R$  donnée par (4.21) implique que la ligne microruban est de longueur infinie. Pour connaître l'impédance série équivalente le long de cette ligne, il suffit de :

1. Calculer l'impédance d'entrée correspondant au coefficient de réflexion  $R$ ;
2. Retrancher de cette impédance l'impédance caractéristique de la ligne qui se poursuit jusqu'à l'infini au-delà de la fente.

Si l'impédance caractéristique du mode fondamental de la ligne microruban est notée  $Z_{car}$ , l'impédance série équivalente  $Z_s$  au couplage entre la ligne microruban

et la fente est :

$$Z_s = Z_{car} \frac{1+R}{1-R} - Z_{car} \quad (4.22)$$

Afin d'ajuster la réactance à l'entrée de la ligne, on ajoute un tronçon de ligne en circuit ouvert en cascade avec l'impédance série équivalente en poursuivant simplement la ligne microruban au-delà de la fente. L'impédance d'entrée  $Z_{in}$  est alors la somme de l'impédance série et de l'impédance du tronçon de ligne en circuit ouvert :

$$Z_{in} = Z_s - jZ_{car} \cot(\beta_{mic}L_{tronçon}) \quad (4.23)$$

où  $L_{tronçon}$  est la longueur du tronçon en circuit ouvert. Bien sûr, pour plus de précision, l'impédance série du tronçon doit être simulée pour tenir compte des effets de bout.

Finalement, on peut calculer le coefficient de réflexion à l'entrée de la ligne à partir de l'impédance d'entrée :

$$S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_{car}}{Z_{in} + Z_{car}} \quad (4.24)$$

La référence de phase pour ce coefficient de réflexion est située au centre de la fente couplée.

#### 4.2.2 Résultats de simulation et validation

Nous présentons ici les résultats obtenus pour les simulations effectuées à l'aide du modèle d'alimentation par fentes couplées. La section 4.2.2.1 comporte des résultats de simulation d'un réseau périodique d'antennes à un résonateur (plaque) validés par des résultats expérimentaux au moyen d'un simulateur à guide d'onde. La section 4.2.2.2 montre les résultats de simulation pour un réseau périodique d'antennes à deux résonateurs validés à partir d'une publication. Finalement, la section 4.2.2.3,

présente des courbes validées du coefficient  $S_{11}$  de réflexion de l'onde à l'entrée de la ligne microruban en fonction de l'angle de balayage du faisceau de l'antenne. Il faut noter que tous les temps de calcul inscrits sur les figures comprennent le temps nécessaire pour la caractérisation de la ligne microruban selon l'approche décrite en 4.2.1.2.

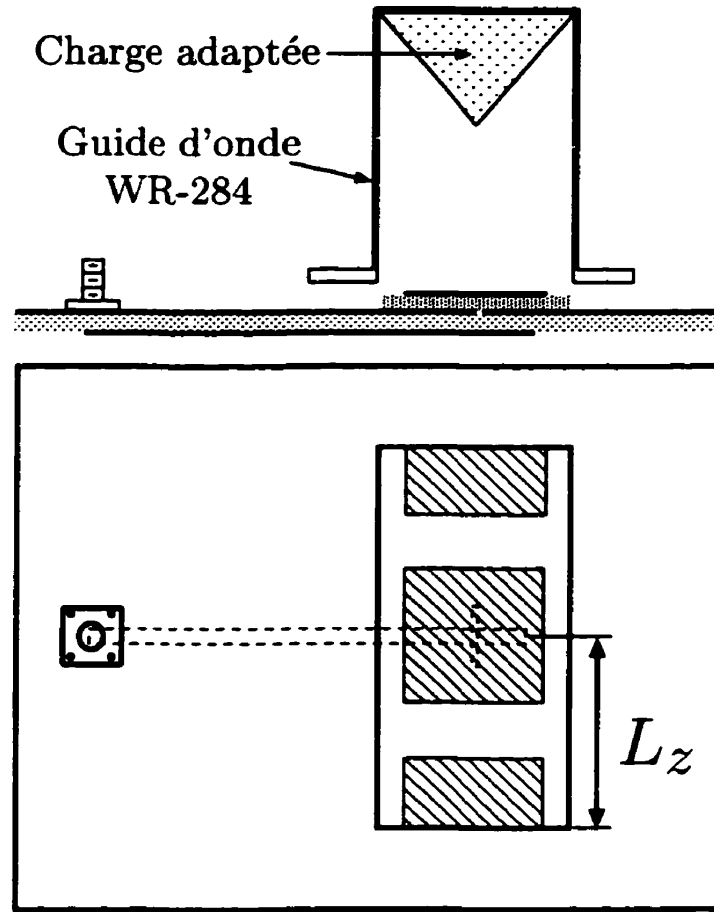
#### 4.2.2.1 Simulateur à guide d'onde à un résonateur - validation expérimentale

La validation expérimentale du modèle de réseau périodique développé pourrait être effectuée par la construction d'un grand réseau d'antennes plaques alimentées par fente. Toutefois, une telle construction serait très onéreuse, car en plus de la taille du circuit multicouche requis, les sources doivent être contrôlées par des déphaseurs variable afin d'effectuer un balayage du faisceau de l'antenne.

Afin d'être en mesure de procéder à la validation expérimentale de son modèle numérique, l'auteur de [16] a plutôt opté pour l'utilisation d'un simulateur à guide d'onde (*waveguide simulator*). Sa construction consiste simplement à inclure dans un tronçon de guide d'onde rectangulaire (l'auteur de [16] a utilisé un guide WR-284) deux cellules adjacentes d'un réseau périodique, comprenant un résonateur couplé par fente. Le guide d'onde est terminé par une charge adaptée (voir figure 4.13). Le mode fondamental  $TE_{10}$  du guide d'onde correspond à la superposition de deux ondes planes se propageant à un angle d'incidence dépendant de la fréquence et de la taille du guide d'onde. Ainsi, l'opération de ce simulateur à guide d'onde est équivalente à celle d'un réseau périodique dont le faisceau serait pointé, dans le plan H ( $\psi = 90^\circ$ ), à un angle de balayage  $\alpha$  lié à la longueur d'onde par :

$$\alpha = \arcsin \left( \frac{\lambda_0}{4L_z} \right) \quad (4.25)$$

où  $L_z$  est l'espacement entre les éléments du réseau selon la direction  $z$ .



**Figure 4.13:** Simulateur de réseau périodique (figure inspirée de [16])

Nous utiliserons ici les résultats expérimentaux donnés par [16] et dont la validité a été confirmée par [2] pour valider le modèle développé. La condition de périodicité doit pour ce faire obéir à la relation donnée par (4.25). En insérant cette relation dans (4.5) et (4.6) et sachant que le plan de balayage est le plan H ( $\psi = 90^\circ$ ), les constantes de phase  $k_{x0}$  et  $k_{z0}$  seront données par :

$$k_{x0} = 0 \quad (4.26)$$

$$k_{z0} = \frac{\pi}{2L_z} \quad (4.27)$$

En utilisant cette condition de périodicité et le modèle d'excitation par couplage

développé plus haut, on peut calculer l'impédance d'entrée  $Z_{in}$  donnée par (4.23) en fonction de la fréquence d'opération.

Les résultats obtenus sont donnés à la figure 4.14. On peut y voir la partie réelle (résistance  $R$ ) et la partie imaginaire (réactance  $X$ ) de l'impédance d'entrée  $Z_{in}$ . Plusieurs courbes correspondant à différents niveaux de discrétisation ainsi que les résultats expérimentaux de [16] sont illustrés. Bien que les courbes soient composées de points discrets, elles sont tracées à l'aide de lignes continues pour en faciliter la lecture.

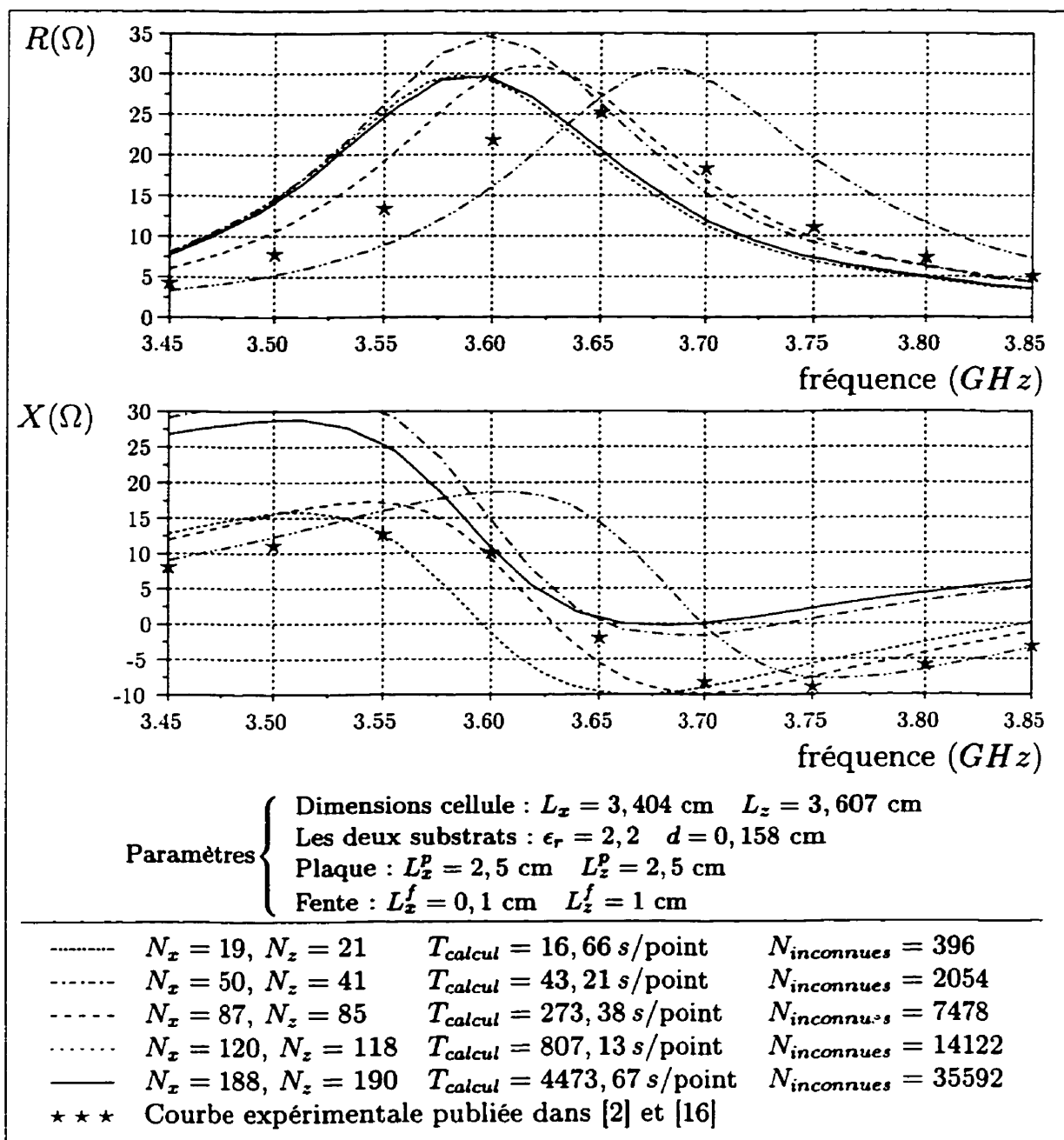
La convergence obtenue pour ces résultats est moins bonne que celle obtenue en 4.1.2 car on considère ici les valeurs d'impédances plutôt que les valeurs du coefficient de réflexion de puissance ; ces dernières sont en fait normalisées par rapport à l'impédance en  $\alpha = 0^\circ$ , ce qui contribue à améliorer la convergence. La forme des courbes simulées correspond à celle des courbes expérimentales, avec une seule résonance, ce qui est normal étant donné que la structure est dotée d'un seul résonateur. Toutefois, de légères différences subsistent entre les résultats de simulations et les résultats expérimentaux, notamment un décalage de la fréquence de résonance d'environ 1,5 %.

La figure 4.15 montre les mêmes courbes pour lesquelles un décalage de fréquence a été effectué afin d'aligner les fréquences de résonance calculées avec la fréquence expérimentale. On constate que la forme des courbes converge assez rapidement. La validation avec les résultats expérimentaux de [16] est très bonne, sauf près de la fréquence de résonance où la courbe simulée de la résistance s'éloigne un peu plus du résultat expérimental.

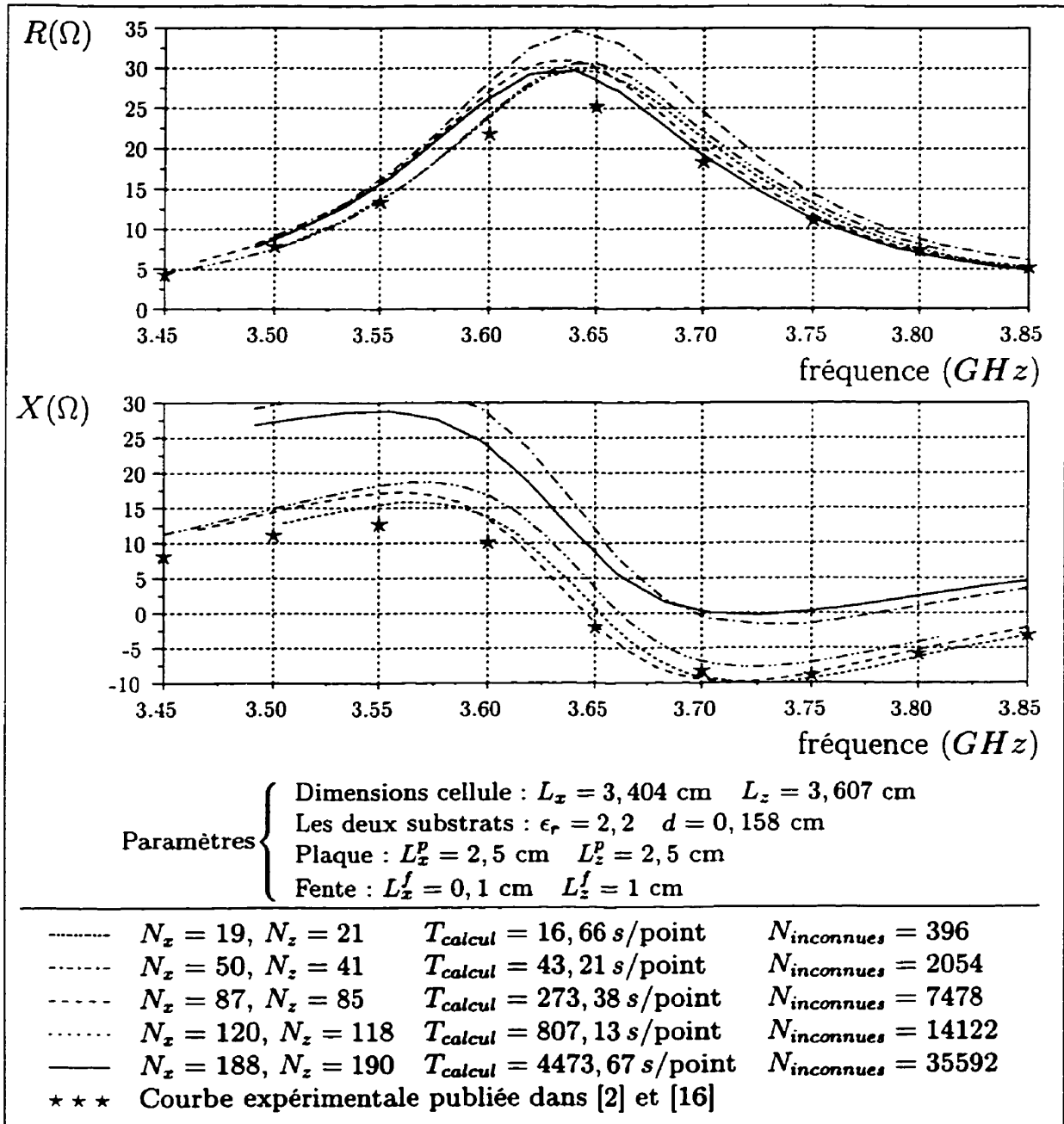
Les courbes de résistance et de réactance corrigées en fréquence semblent converger vers une discrétisation de  $120 \times 118$ , ce qui donne un système d'équations de 14 122 inconnues. On comprend ici toute l'importance d'utiliser un algorithme itératif de solution afin de réduire la taille mémoire employée et le temps de calcul requis. Le temps de résolution du système d'équations de 14 122 inconnues est de

807 secondes, ce qui correspond à 13,45 minutes ; encore une fois, ces calculs ont été effectués sur un ordinateur personnel Pentium I cadencé à 200 Mhz. Si nous avons construit la matrice pleine correspondante, cela aurait nécessité environ 3 giga-octets de mémoire vive et 47 heures de calcul avec un processeur équivalent.

Les fluctuations de la fréquence de résonance simulée sont probablement dues en partie à des erreurs de discrétisation de la dimension résonante ( $L_x$ ) du résonateur. En effet, la discrétisation combinée d'une plaque et d'une fente ne permet pas de respecter les paramètres de bord sur les deux structures à la fois. Les valeurs de  $N_x$  et  $N_z$  ont été choisies de façon à respecter le plus possible le paramètre de bord dans la discrétisation de la fente, puisque les erreurs de discrétisation de cette dernière résultent en des variations assez importantes de l'impédance d'entrée. Toutefois, il est fortement probable que l'erreur de discrétisation de la largeur de la fente soit la principale cause des fluctuations de fréquence de résonance, car une variation de la largeur de la fente peut résulter en un changement de la «permittivité effective» du système et ainsi modifier la taille résonante de la plaque. On pourrait remédier aux fluctuations de la fréquence de résonance en recherchant les valeurs optimales des paramètres de bord utilisés pour la discrétisation de la plaque et, surtout, de la fente. Cette recherche n'a pas été effectuée ici ; la valeur ayant été utilisée pour le paramètre de bord est la valeur optimale pour le cas d'un problème à deux dimensions ( $p = 0.25$ ).

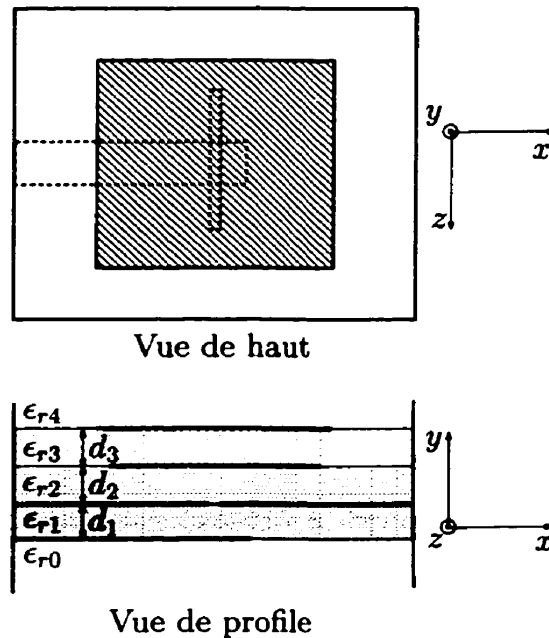


**Figure 4.14:** Courbes de l'impédance (résistance  $R$  et réactance  $X$ ) à l'entrée de la ligne microruban en fonction de la fréquence pour une antenne plaque couplée par fente placée dans un guide d'onde (simulateur de réseau périodique).



**Figure 4.15:** Courbes normalisées par rapport à la fréquence de résonance de l'impédance (résistance  $R$  et réactance  $X$ ) à l'entrée de la ligne microruban en fonction de la fréquence pour une antenne plaque couplée par fente placée dans un guide d'onde (simulateur de réseau périodique).





**Figure 4.16:** Antenne à deux résonateurs plaques couplés par fente constituant l'un des éléments d'un réseau périodique.

#### 4.2.2.2 Simulateur à guide d'onde à deux résonateurs - validation avec une publication

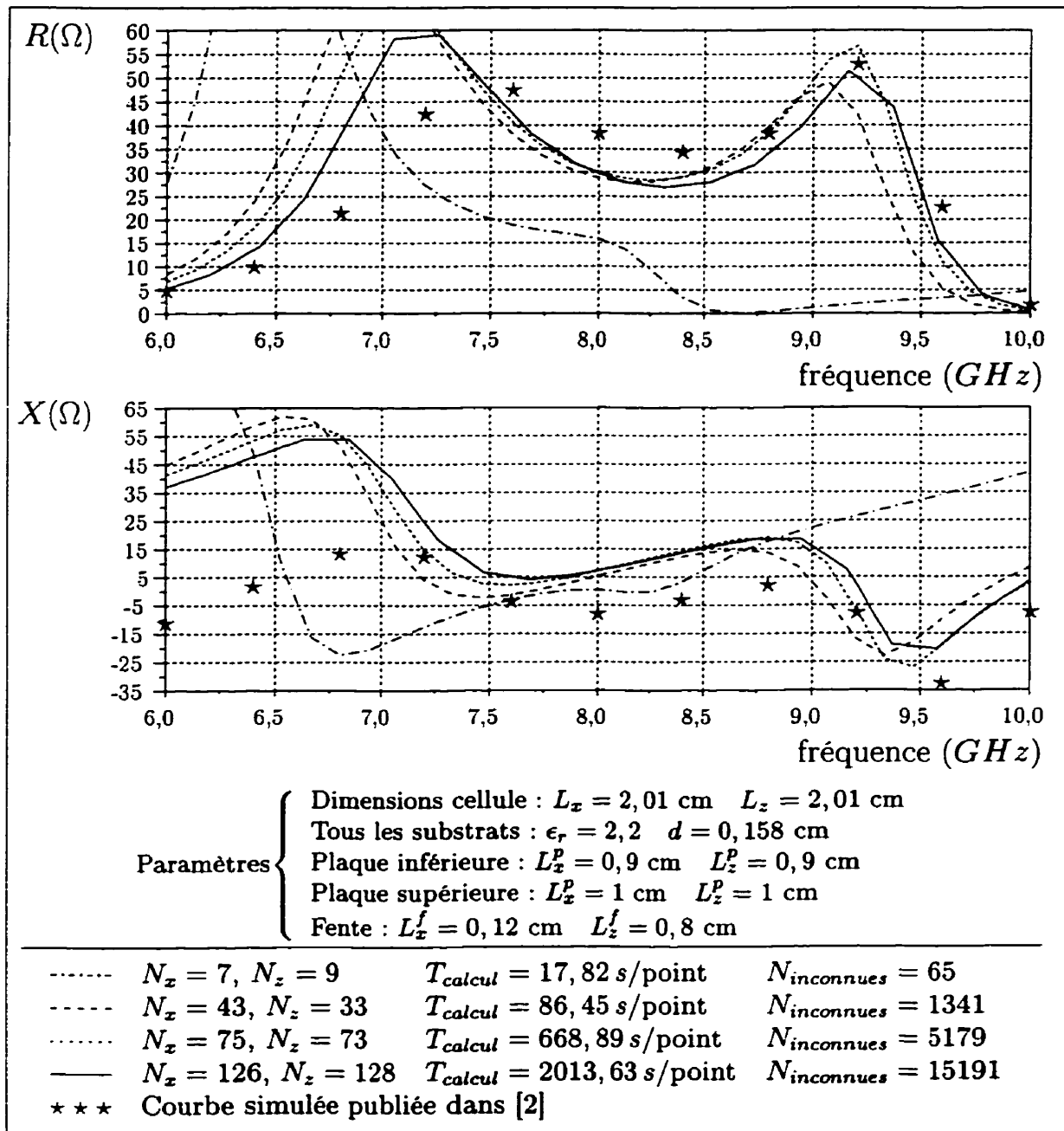
Nous présentons ici des résultats de simulation d'un réseau périodique d'antennes à deux résonateurs. La structure considérée (voir figure 4.16) est placée à l'intérieur d'un simulateur à guide d'onde, de façon similaire à la structure à un seul résonateur illustrée à la figure 4.13.

Cette configuration est destinée à augmenter la largeur de bande, les deux plaques superposées agissant comme résonateurs à des fréquences différentes. Tout comme à la section précédente, le balayage du faisceau de l'antenne est lié à la fréquence d'opération par (4.25) pour permettre la validation avec les résultats de simulations numériques publiés dans [2]. Les impédances d'entrée présentées sont donc celles d'un simulateur à guide d'onde.

Les résultats obtenus sont affichés à la figure 4.17, qui présente la résistance  $R$  et la réactance  $X$  à l'entrée de la ligne microruban alimentant la fente ; ces impédances

tiennent compte de l'ajout d'un tronçon de ligne en circuit ouvert à la suite de la fente dont la longueur est spécifiée sur la figure. Encore une fois, 4 courbes correspondant à autant de niveaux de discrétisation sont présentés ; ces courbes sont composées de points discrets mais sont tracées à l'aide de lignes continues pour faciliter la lecture. De plus, des résultats simulés et publiés dans [2] sont illustrés pour comparaison.

Tout comme dans le cas à un seul résonateur, nous avons un problème de convergence des résultats. Ce problème est accentué par le fait que la structure étudiée ici comporte une interface supplémentaire, augmentant du même coup le nombre d'inconnues pour une discrétisation donnée. Les courbes présentent toutefois des fréquences de résonances alignées avec les fréquences de résonance des courbes de [2]. Étant donné que les courbes de [2] sont des courbes simulées dont on ne connaît pas le niveau de convergence, il est difficile de comparer les caractéristiques de la courbe autres que les fréquences de résonance. On remarque toutefois une assez bonne correspondance entre les résultats obtenus et les résultats publiés pour ce qui est de la valeur de la résistance d'entrée  $R$ .



**Figure 4.17:** Courbes de l'impédance (résistance  $R$  et réactance  $X$ ) à l'entrée de la ligne microruban en fonction de la fréquence pour une antenne à deux résonateurs placée dans un guide d'onde (simulateur de réseau périodique à deux fréquences d'opération).

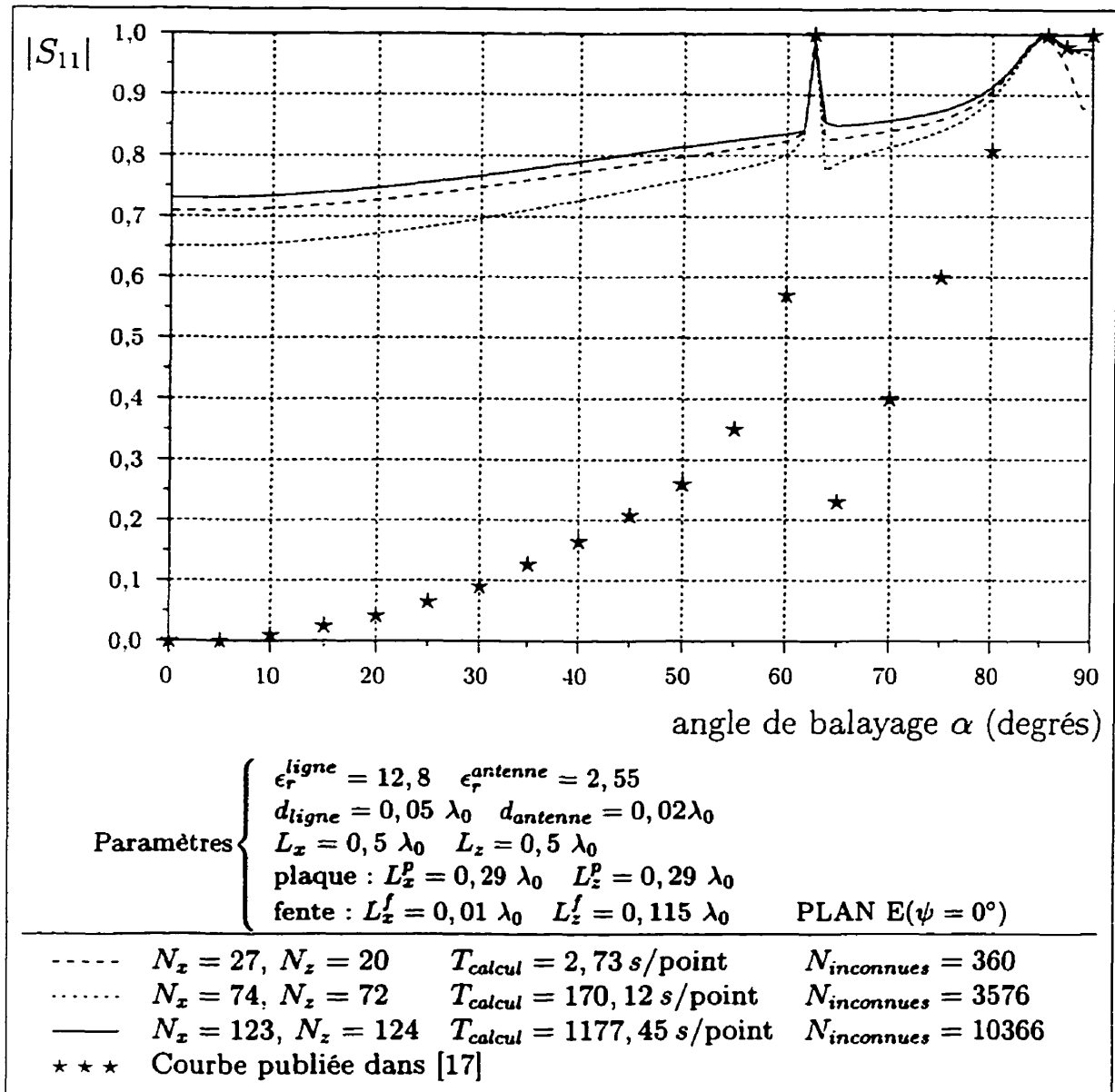
#### 4.2.2.3 Balayage du faisceau : validation avec résultats de simulation publiés

Après avoir procédé à la validation du modèle par un balayage en fréquence de l'impédance d'entrée d'un simulateur à guide d'onde, nous procédons maintenant à la simulation du balayage de phase d'un réseau périodique. Le résultat désiré est la valeur du coefficient de réflexion à l'entrée de la ligne microruban alimentant l'un des éléments du réseau, tel que défini par (4.24). Les résultats seront validés à l'aide de courbes publiées dans [16]. La ligne microruban utilisée a une impédance caractéristique de  $50 \Omega$ .

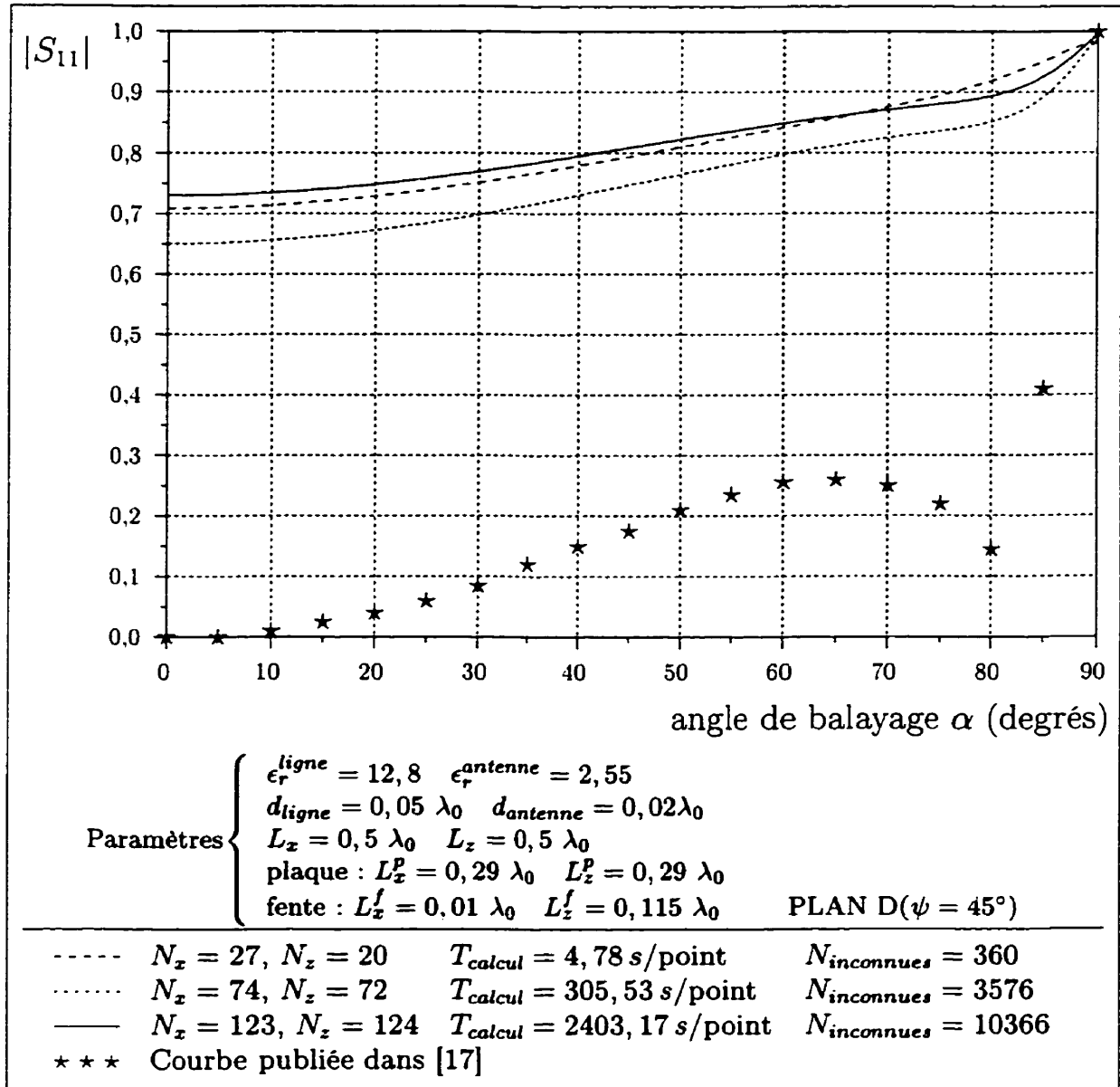
La configuration utilisée par l'auteur de [16] a été employée pour les simulations. Les paramètres utilisés ainsi que les résultats obtenus pour le balayage dans les plans d'incidence E ( $\psi = 0^\circ$ ), D ( $\psi = 45^\circ$ ) et ( $\psi = 90^\circ$ ) sont présentés aux figures 4.18 à 4.20. Ces figures présentent aussi les courbes de [16]. Comme on le constate, l'adaptation n'est pas parfaite à l'incidence normale ( $\psi = 0^\circ$ ), bien que la configuration choisie par l'auteur de [16] produise selon les simulations effectuées par ce dernier une impédance d'entrée de  $50 \Omega$  à l'incidence normale. Ici encore, les erreurs de discrétisation sont en cause. Un balayage en fréquence pour l'incidence normale permet de constater une translation en fréquence de l'adaptation parfaite ; ainsi, une impédance d'entrée de  $50 \Omega$  est obtenue avec la présente méthode à une fréquence inférieure d'environ 3,5 % à  $f_0$  pour une discrétisation de  $74 \times 72$ , où  $f_0$  est la fréquence correspondant à la longueur d'onde  $\lambda_0$  en fonction de laquelle sont données les dimensions. La fréquence d'adaptation parfaite se rapproche graduellement de  $f_0$  à mesure que l'on raffine la discrétisation.

Les figures 4.21 à 4.23 affichent l'amplitude du coefficient de réflexion de puissance  $\Gamma_P$ , obtenu par l'équation (4.4) à partir de l'impédance d'entrée (4.23). La convergence de ces courbes est nettement accélérée par rapport aux précédentes, puisqu'il s'agit de courbes normalisées par rapport à l'impédance d'entrée à l'incidence normale. La comparaison avec les courbes de [16] est excellente, sauf pour le

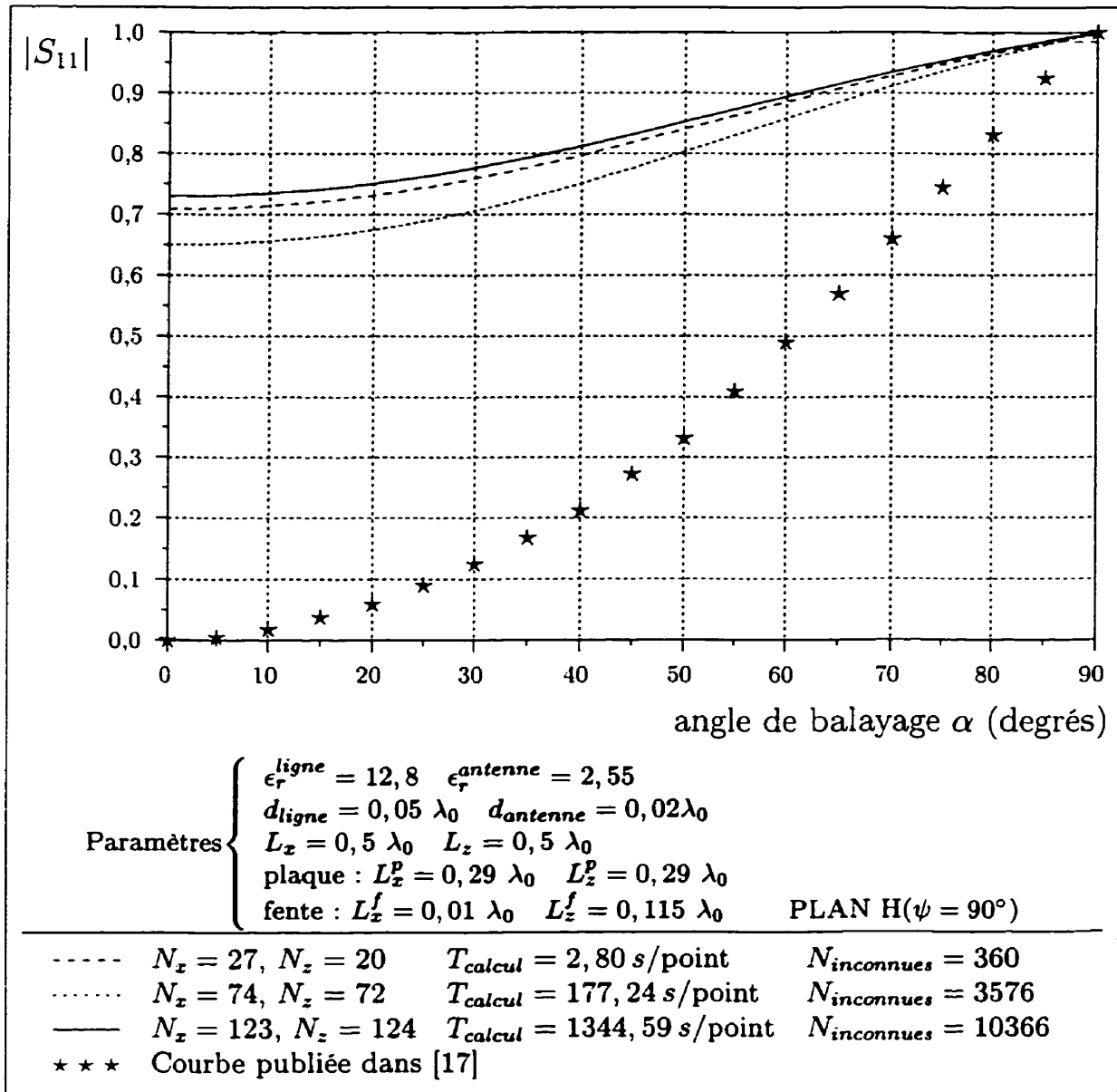
balayage dans le plan D qui nécessiterait possiblement une discrétisation plus raffinée. Les formules données à la section 4.1.2.1 permettent de prédire les deux angles de balayage auxquels se produisent un aveuglement total. Ces derniers sont associés à l'excitation d'ondes de surface associées aux modes  $TM_0$  des substrats d'alimentation (sous le plan de masse) et d'antenne (au-dessus du plan de masse). Les angles prévus pour l'aveuglement sont  $\alpha = 62,7^\circ$  et  $\alpha = 85,6^\circ$ , ce qui correspond aux résultats obtenus. À cause du mode d'excitation (voir explications à la section 4.1.2.1), ces aveuglements ne se produisent que dans le plan E.



**Figure 4.18:** Courbe de l'amplitude du coefficient  $S_{11}$  de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan E ( $\psi = 0^\circ$ ) à l'entrée d'une ligne microruban alimentant l'une des fentes du réseau périodique. Résultat obtenu avec la méthode des lignes avec 3 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point et nombre d'inconnues. Validation avec [16].

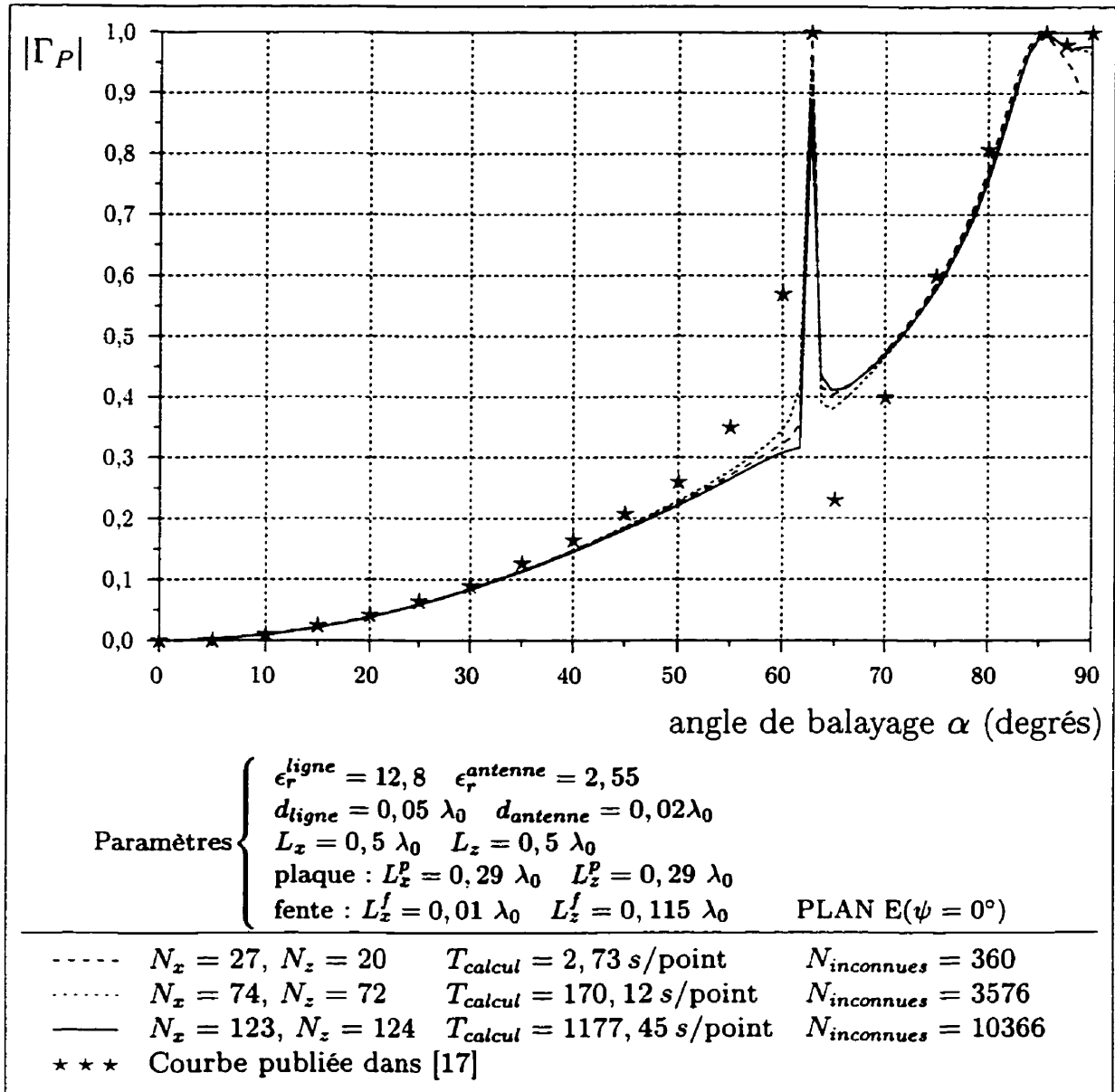


**Figure 4.19:** Courbe de l'amplitude du coefficient  $S_{11}$  de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan D ( $\psi = 45^\circ$ ) à l'entrée d'une ligne microruban alimentant l'une des fentes du réseau périodique. Résultat obtenu avec la méthode des lignes avec 3 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point et nombre d'inconnues. Validation avec [16].

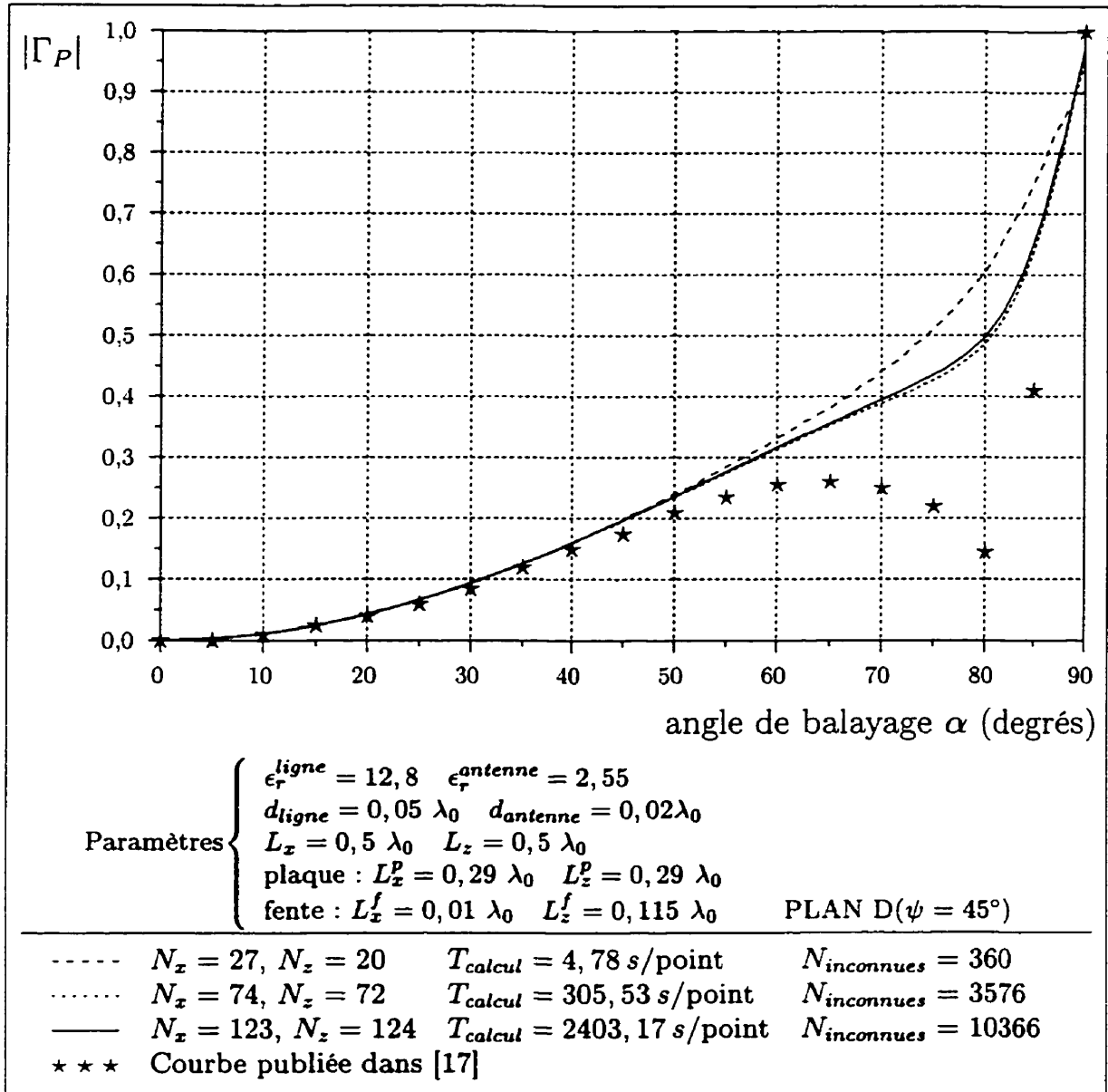


**Figure 4.20:** Courbe de l'amplitude du coefficient  $S_{11}$  de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan H ( $\psi = 90^\circ$ ) à l'entrée d'une ligne microruban alimentant l'une des fentes du réseau périodique. Résultat obtenu avec la méthode des lignes avec 2 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point et nombre d'inconnues. Validation avec [16].

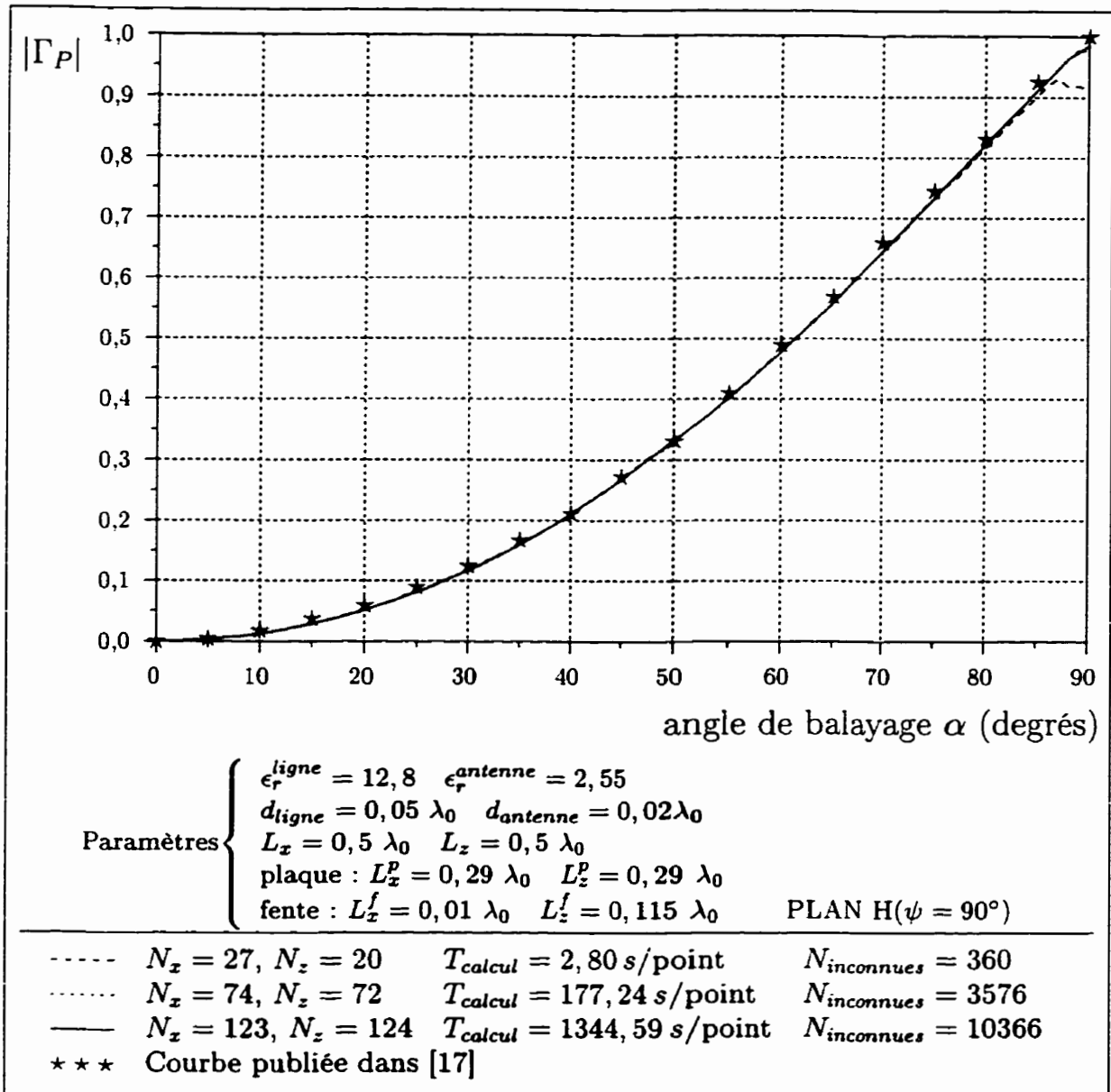




**Figure 4.21:** Courbe de l'amplitude du coefficient  $\Gamma_P$  de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan E ( $\psi = 0^\circ$ ) à l'entrée d'une ligne microruban alimentant l'une des fentes du réseau périodique. Résultat obtenu avec la méthode des lignes avec 3 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point et nombre d'inconnues. Validation avec [16].



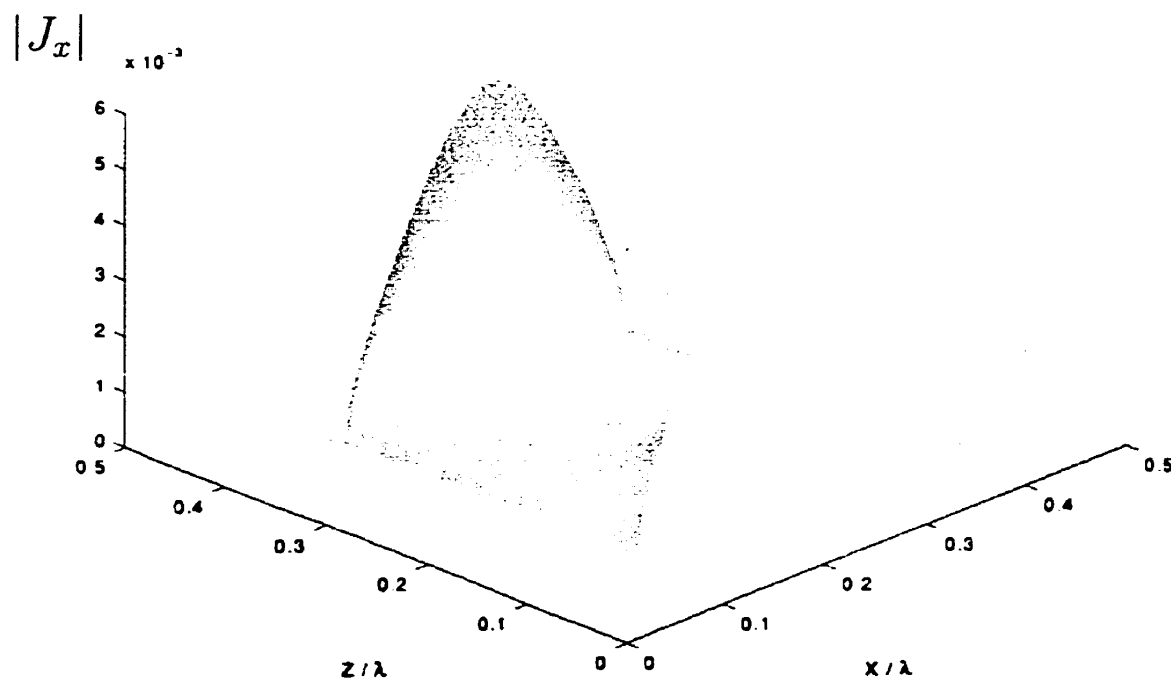
**Figure 4.22:** Courbe de l'amplitude du coefficient  $\Gamma_P$  de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan D ( $\psi = 45^\circ$ ) à l'entrée d'une ligne microruban alimentant l'une des fentes du réseau périodique. Résultat obtenu avec la méthode des lignes avec 3 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point et nombre d'inconnues. Validation avec [16].



**Figure 4.23:** Courbe de l'amplitude du coefficient  $\Gamma_P$  de réflexion de l'onde de puissance en fonction de l'angle  $\alpha$  de balayage du faisceau dans le plan H ( $\psi = 90^\circ$ ) à l'entrée d'une ligne microruban alimentant l'une des fentes du réseau périodique. Résultat obtenu avec la méthode des lignes avec 2 niveaux de discrétisation avec temps de calcul moyen par point et nombre d'inconnues. Validation avec [16].

### 4.3 Exemples de distributions de courants et de champs obtenues

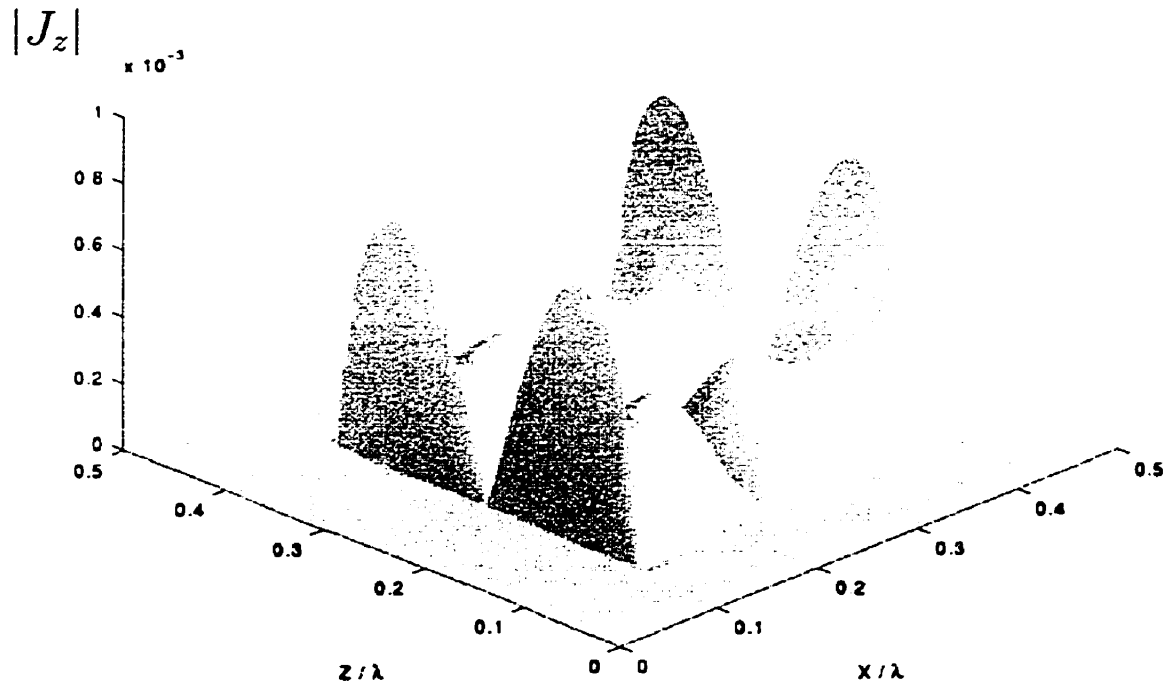
Tous les résultats de paramètres macroscopiques (impédance d'entrée, coefficients de réflexion, etc.) affichés précédemment sont calculés à partir des distributions de champ électrique tangentiel et de densité de courant électrique obtenus comme solution aux systèmes d'équations formulés. La visualisation de ces distributions aide aussi à juger de la validité du modèle proposé. C'est pourquoi nous incluons dans cette section quatre figures représentant, à titre d'exemple, les distributions des composantes de champ électrique tangentiel  $E_x$  et  $E_z$  ainsi que les distributions des composantes de densité de courant électrique  $J_x$  et  $J_z$  obtenues à l'interface sur laquelle est imprimée l'antenne plaque pour la configuration considérée aux figures 4.8 à 4.10. Les solutions affichées correspondent au cas où le faisceau du réseau périodique est



**Figure 4.24:** Densité de courant électrique  $J_x$  en Ampères/m au niveau du résonateur plaque

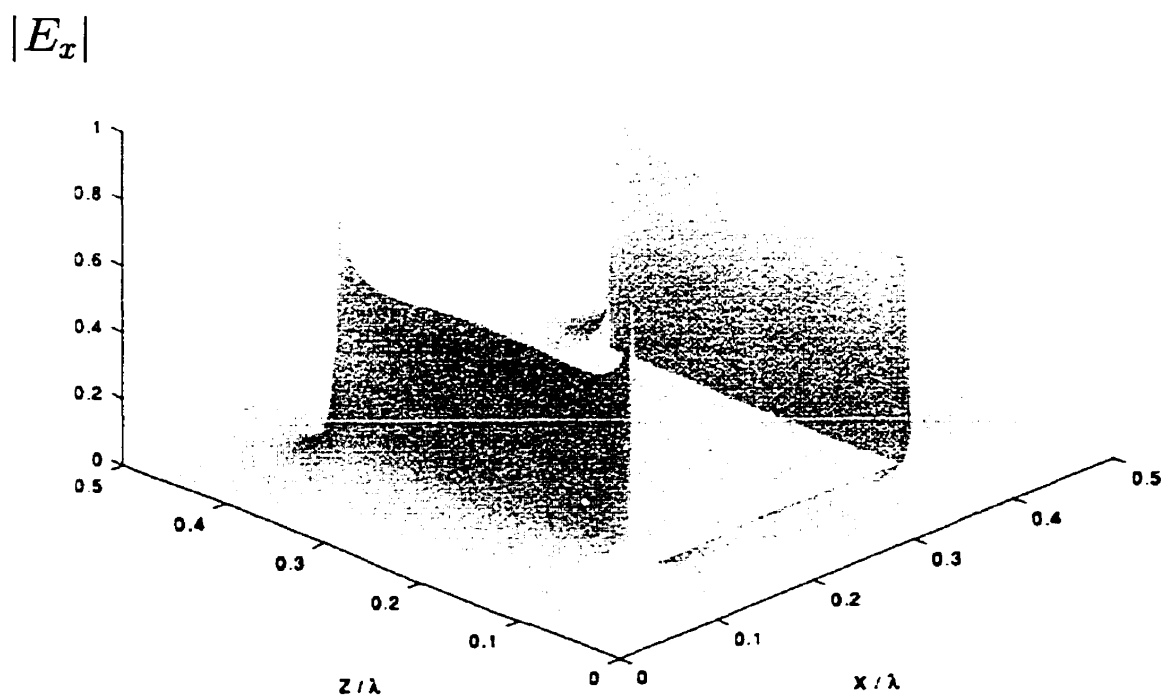
pointé dans la direction normale aux interfaces ( $\alpha = 0^\circ$ ,  $\psi = 0^\circ$ ). La discrétisation utilisée pour la simulation est de  $160 \times 160$  points, ce qui a généré un système d'équations d'environ 17 000 inconnues. En utilisant le critère de convergence quantitatif défini à la section 2.11.3.1 pour la résolution du système d'équations, le temps de calcul nécessaire pour effectuer cette simulation est d'environ 12 minutes sur un ordinateur personnel Pentium I cadencé à 200 Mhz, alors que la taille mémoire requise est d'environ 25 méga-octets. Par comparaison, une résolution classique du système d'équations utilisant l'algorithme de décomposition LU aurait nécessité au-delà de 4,3 giga-octets de mémoire et, en supposant que cette mémoire vive ait été disponible, elle aurait été complétée après plus de 1 h 20 min de calcul.

Les figures 4.24 à 4.27 illustrent les quatre quantités mentionnées. Les distribu-



**Figure 4.25:** Densité de courant électrique  $J_z$  en Ampères/m au niveau du résonateur plaque

tions obtenues sont conformes à ce à quoi l'on pourrait s'attendre, étant donné que l'excitation dans la fente est polarisée selon l'axe des  $x$ . La densité de courant  $J_x$  présente des singularités sur les bords de la plaque parallèles à l'axe des  $x$  ainsi que des zéros sur les bords parallèles à l'axe des  $z$ . L'observation inverse peut être faite pour la densité de courant  $J_z$ . Quant à la distribution de la composante champ  $E_x$ , elle présente des singularités le long des bords de la plaque parallèles à l'axe des  $z$ , ce à quoi l'on s'attend. L'observation inverse peut être faite pour la composante de champ  $E_z$ .



**Figure 4.26:** Champ électrique  $E_x$  en V/m au niveau du résonateur plaque

#### 4.4 Conclusion du chapitre

Le mode d'alimentation avec source de tension idéale distribuée nous a permis de vérifier que les phénomènes connus tels le couplage aux ondes de surface et l'excitation de lobes discordants sont bel et bien pris en compte par notre modèle numérique. De plus, nous avons conclu que l'impact de ces phénomènes sur l'amplitude de la réflexion de l'onde de puissance émise par une source ne dépend pas, à toutes fin pratiques, de la nature de la source. La convergence des résultats pour le coefficient  $\Gamma_P$  est très satisfaisante.

La combinaison de la technique de réciprocité et du modèle basé sur la méthode des lignes développé au chapitre 2 nous a permis de prédire l'impédance à l'entrée de la ligne microruban alimentant l'un des éléments d'un réseau périodique d'antennes

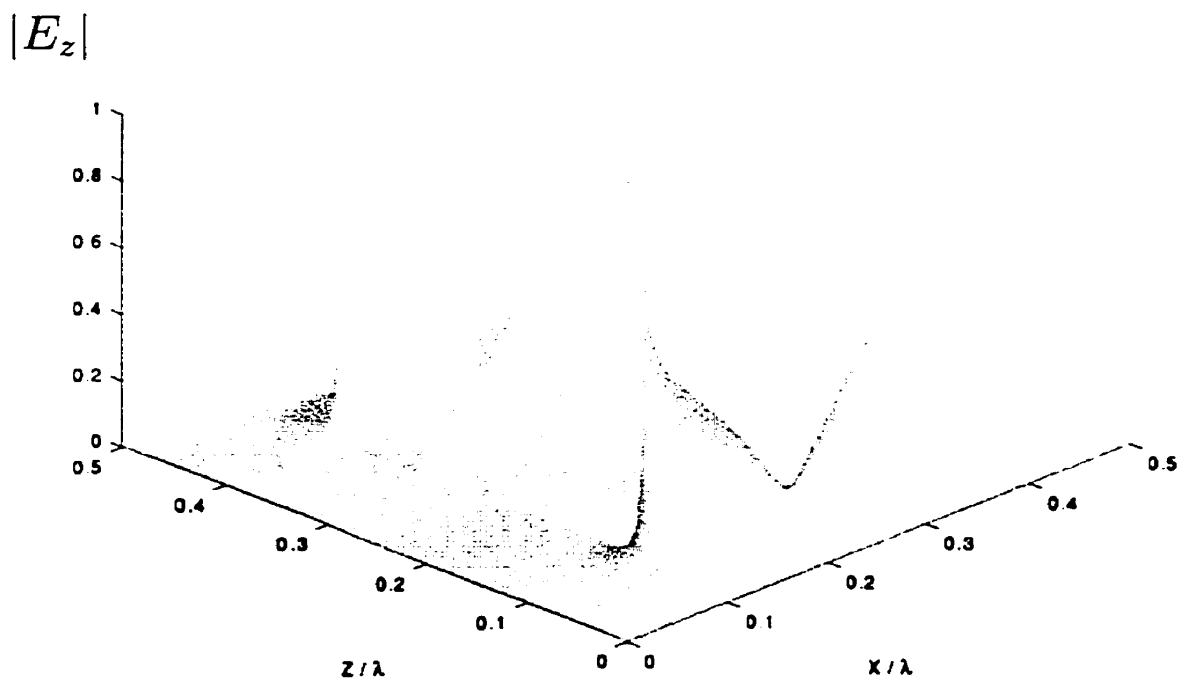


Figure 4.27: Champ électrique  $E_z$  en V/m au niveau du résonateur plaque

plaques. Les comportements en fréquence de réseaux périodiques composés d'éléments à un et deux résonateurs ont été simulés et les résultats ont été validés à l'aide de valeurs expérimentales et simulées disponibles dans les publications. Toutefois, des difficultés de convergence ont été rencontrées. Ces dernières sont clairement liées aux erreurs de discrétisation, qui sont difficiles à contrôler étant donné les diverses dimensions (fente, premier et second résonateur) devant être discrétisées suivant une seule et même grille de discrétisation. De plus, on doit s'attendre à une plus grande sensibilité à la discrétisation près des résonances à haut facteur de qualité puisque la méthode n'utilise pas de fonctions de base globales. Des problèmes similaires ont été rencontrés pour le calcul de l'adaptation d'antenne ( $S_{11}$ ) mais ils sont corrigés lors du calcul du coefficient  $\Gamma_P$  de réflexion de l'onde de puissance.

Bien que les erreurs de discrétisation soit à première vue responsables des désaccords entre les résultats obtenus et les résultats publiés utilisés pour fins de comparaison, d'autres facteurs pourraient être en cause, comme par exemple le fait que les pertes ne soient pas prises en compte dans les simulations et le nombre limité de modes utilisés dans les simulations effectuées par les auteurs des publications consultées.



## CONCLUSION

Nous rappellerons d'abord les étapes importantes de ce mémoire, puis nous discuterons des principaux problèmes rencontrés et des contributions apportées. Finalement, nous proposerons des avenues d'investigation future en rapport avec les travaux accomplis.

### Rappel des étapes importantes

Nous avons présenté, au premier chapitre, les deux applications principalement visées par le modèle de réseau périodique multicouche développé, soit les surfaces à sélection de fréquences et les réseaux d'antennes plaques couplées par fentes. Puis, au chapitre 2, nous avons formulé un modèle générique servant à simuler le comportement d'un réseau périodique multicouche à excitation quelconque : ce modèle a permis de définir un système d'équations homogène reliant entre elles les valeurs discrétisées du champ électrique tangentiel et de la densité de courant électrique à chacune des interfaces de la structure. L'approche présentée pour la représentation et la résolution du système combine la méthode des lignes, une méthode itérative (*Bi-CGSTAB2*)<sup>3</sup> de résolution de systèmes d'équations et la transformée rapide de Fourier. La combinaison de ces deux dernières techniques est similaire à une technique connue sous le nom *CGFFT*<sup>4</sup>.

Au chapitre 3, nous avons formulé une technique d'excitation du modèle générique permettant de prédire, par simulations, les coefficients de réflexion et de transmission de surfaces à sélection de fréquences. Les résultats obtenus ont été comparés avec succès avec des résultats publiés. De plus, nous avons remarqué que la convergence de la méthode pour la modélisation des surfaces à sélection de fréquences est excellente.

---

<sup>3</sup> Sigle utilisé dans [11] et signifiant *bionjugate gradient squared method with stabilization*, 2<sup>nd</sup> version.

<sup>4</sup> *Conjugate Gradient Fast Fourier Transform* [5]

Le chapitre 4 présente un deuxième mode d'excitation du modèle générique servant à simuler le comportement de réseaux d'antennes plaques couplées par fentes. Un modèle de source de tension idéale distribuée est d'abord considéré pour confirmer que la méthode des lignes représente adéquatement certains phénomènes connus et prédictibles, tels le couplage aux modes de surface et aux lobes discordants, qui se produisent dans des directions précises lors du balayage du faisceau d'un réseau périodique. Les résultats présentés pour ce type de source permettent effectivement de mettre en évidence les phénomènes escomptés. La convergence des résultats obtenus est excellente et la validité de ces derniers est confirmée par la comparaison avec des résultats publiés.

On étudie ensuite une source physiquement réalisable, soit le couplage d'une ligne microruban à l'antenne plaque à travers une fente dans le plan de masse. La technique de réciprocité utilisée avec la méthode des moments pour modéliser le couplage de la ligne microruban à la fente est adaptée pour l'utilisation avec la méthode des lignes. Une simple liaison entre l'angle de balayage du faisceau et la fréquence d'opération permet de valider les résultats obtenus pour l'impédance d'entrée avec des données expérimentales issues de mesures effectuées sur l'impédance à l'entrée d'un simulateur à guide d'onde en fonction de la fréquence. Les résultats de simulation obtenus pour un simulateur à guide d'onde pourvu d'un seul résonateur montrent une convergence rapide de la forme des courbes d'impédance, qui comportent toutefois un décalage en fréquence attribué aux erreurs de discrétisation. La forme des courbes obtenues concorde avec celle de courbes expérimentales publiées. Quant aux résultats obtenus pour un simulateur à guide d'onde à deux résonateurs superposés, ils présentent les principales caractéristiques des courbes publiées obtenues par simulation. Cependant, on ne peut conclure sur la validité des valeurs numériques des résultats obtenues, car on ne connaît pas le niveau de convergence des courbes publiées.

Finalement, des simulations consistant à faire balayer le faisceau du réseau dans trois plans à une fréquence donnée ont donné des valeurs de  $S_{11}$  très différentes des

valeurs publiées obtenues avec la méthode des moments. Un décalage en fréquence d'à peine 3 % est responsable de ces divergences ; ce dernier peut provenir soit d'erreurs de discrétisation avec la méthode des lignes, soit d'un nombre insuffisant de modes utilisé pour les simulations effectuées par l'auteur de [16] avec la méthode des moments. Toutefois, les résultats obtenus par le calcul de l'amplitude du coefficient de réflexion de l'onde de puissance (basé sur une normalisation de l'impédance par rapport à l'impédance obtenue à l'incidence normale) correspondent très précisément aux résultats publiés.

### Problèmes rencontrés

Plusieurs problèmes d'ordre numérique ont été rencontrés. D'abord, lors de la construction des matrices transformées formant le système d'équation globale (matrices  $\overline{\mathbf{R}}_m$  et  $\overline{\mathbf{U}}_m$ ), il importe de faire *analytiquement* toutes les simplifications menant aux équations (2.103) et (2.107). En effet, le calcul numérique de ces expressions à partir des valeurs obtenues pour  $\overline{\mathbf{V}}_m$  et  $\overline{\mathbf{Z}}_m$  mène à des erreurs numériques très importantes, car elles mènent à une perte d'information par troncature des valeurs intermédiaires. Ce problème a été résolu par le traitement analytique des expressions jusqu'aux valeurs entrant directement dans la matrice globale du système d'équations transformé.

Le second problème rencontré concerne les erreurs de discrétisation. Il s'agit en fait du principal problème de l'utilisation de la méthode des lignes pour l'analyse de structures périodiques. Le problème est lié au fait que la taille de la cellule (période) et des motifs métalliques sont prédéterminés. Dans le cas où l'on modéliserait une structure physique située en milieu ouvert en plaçant des murs électriques loin de la structure, il serait toujours possible de changer la distance entre les murs électriques pour que la taille des motifs métalliques puisse toujours respecter la valeur fixée du paramètre de bord  $p$  quels que soient les nombres de lignes  $N_x$  et  $N_z$  dans la cellule. Ceci est impossible dans notre cas, car nous ne pouvons changer la taille de

la cellule sans modifier directement la nature même du problème (la période). Dans le cas où l'on désire tracer des courbes d'un paramètre en fonction de la taille d'une structure métallique (comme par exemple pour le cas des bandes métalliques à la section 3.4.1.2), on n'a qu'à choisir les tailles représentable exactement en vertu du paramètre de bord. Par contre, lorsqu'on désire obtenir des résultats pour des tailles fixes données, il en résulte des erreurs de discrétisation. Ces erreurs de discrétisation ne sont critiques que dans le cas des dimensions résonantes de la structure, car elles causent un décalage en fréquence. Il n'en demeure pas moins que l'outil développé est valable pour la conception d'antennes, car hormis les faibles décalages en fréquence possibles, la forme des courbes obtenues est fidèle au comportement réel, tel que la comparaison aux résultats expérimentaux obtenus pour un simulateur à guide d'onde l'a démontré.

### Principales contributions

Lors du présent travail de maîtrise, plusieurs techniques existantes, telles que la méthode des lignes, la transformée rapide de Fourier, les méthodes itératives de résolution de systèmes d'équations et la technique de réciprocité ont été combinées afin de développer un outil de calcul original. Voici quelques-unes des contributions apportées par ce travail de maîtrise :

1. *La formulation d'un modèle multicouche périodique basé sur la méthode des lignes.* Ce modèle permet de choisir, sur chacune des interfaces, l'inconnue la plus appropriée (champ électrique ou densité de courant électrique) à utiliser pour réduire au minimum le nombre d'inconnues du système. De plus, le modèle est général en ce qu'il permet de placer, aux interfaces inférieure et supérieure, soit une condition absorbante, soit un mur électrique (métal), soit une source de champ électrique ou de densité de courant électrique, soit encore une combinaison de l'une ou l'autre de ces conditions aux frontières. Le caractère général du modèle concerne aussi l'application de sources. Il est possible

d'appliquer soit une source de champ électrique, soit une source de densité de courant électrique sur une portion ou la totalité de l'une des interfaces du système. Bien que ces sources soient des sources dites «idéales», nous avons vu aux chapitres 3 et 4 qu'il était possible de représenter des sources aussi différentes qu'une onde plane incidente et un mode microruban alimentant une fente par des sources idéales.

2. *La réduction de la taille mémoire et du temps de calcul par la combinaison de la transformée rapide de Fourier et d'une méthode itérative de résolution de systèmes d'équations.* La nature périodique des structures analysées autorise l'exploitation des propriétés circulantes des opérateurs matriciels utilisés. Ceci nous a permis de formuler, dans le domaine spectral, les produits matriciels en termes de simples produits «terme à terme» des blocs transformés d'une matrice et des vecteurs d'inconnues transformés. Le produit de la matrice du système d'équations et d'une solution estimée est effectué sous cette forme à l'intérieur d'un processus itératif visant à obtenir la solution du système d'équations. De plus, il s'avère que les matrices formées par la méthode des lignes à partir de structures périodiques se prêtent particulièrement bien à la résolution itérative, vraisemblablement parce qu'elles sont bien conditionnées, à cause de la proximité des valeurs propres des transformées utilisées; ces dernières sont en fait compressées (voir équations (2.40) et (2.41)) par rapport aux valeurs propres de la transformée discrète de Fourier, qui sont régulièrement espacées dans le domaine spectral.

Cette technique combinant l'algorithme *Bi-CGSTAB2* et la TFR <sup>5</sup> permet des économies de mémoire et de temps de calcul de plusieurs ordres de grandeur (voir section 2.11 à cet effet), rendant possible la résolution de systèmes d'équations comportant des dizaines de milliers d'inconnues sur un ordinateur personnel en des temps raisonnables. La technique employée ne constitue *pas*

---

<sup>5</sup>transformée rapide de Fourier

un compromis permettant l'utilisation d'un ordinateur de puissance réduite, elle est tout simplement beaucoup plus efficace que la résolution d'un système d'équation par la décomposition LU, et ce, même en considérant l'utilisation d'un ordinateur puissant disposant d'une quantité de mémoire vive suffisante pour contenir la matrice complète du système d'équations. On pourra donc considérer l'utilisation de cet algorithme de résolution pour simuler des structures d'une complexité croissante à mesure que la puissance de calcul et la taille mémoire des ordinateurs s'accroîtront.

L'utilisation de la discrétisation non uniforme n'a pas été envisagée car elle empêcherait l'exploitation de la présente technique exploitant les propriétés des structures périodiques ; en effet, les transformées obtenues par diagonalisation numérique avec une discrétisation non uniforme ne sont pas représentables au moyen de la transformée rapide de Fourier. De plus, la discrétisation non uniforme restreint la généralité des structures représentables, car le patron de discrétisation dépend alors des motifs métalliques utilisés, sans compter qu'il est difficile d'établir une discrétisation non uniforme commune à plusieurs interfaces comportant des motifs métalliques différents les uns des autres. La méthode développée ici contribue certes à augmenter le nombre d'inconnues nécessaires pour la résolution des problèmes, mais le processus combinant la méthode itérative de résolution et la transformée rapide de Fourier réduit la charge de calcul à un point tel que l'augmentation du nombre d'inconnues en vaut la peine.

3. *L'adaptation de la technique de réciprocité pour l'utilisation avec la méthode des lignes.* La technique de réciprocité utilisée par [16] permet de modéliser le couplage d'une ligne microruban à une fente pratiquée dans le plan de masse sous le résonateur plaque. Cette technique a été adaptée pour l'utilisation combinée avec la méthode des lignes. L'adaptation permet de procéder à l'excitation du système homogène par une source de courant idéale dans la fente, puis d'ex-

traire le coefficient de réflexion sur la ligne à partir de la réaction du système à l'excitation de courant. Contrairement à l'approche présentée dans [16] qui restreint à un seul mode le champ électrique tangentiel dans la fente, l'adaptation développée dans le cadre de ce travail n'est pas basée sur le choix d'un mode de champ électrique dans la fente; les échantillons de champ électrique dans la fente font partie des inconnues et peuvent prendre une forme quelconque. L'utilisation de cette technique rend possible le couplage d'une ligne microruban à la structure périodique sans imposer les conditions de périodicité à la ligne microruban.

Bien que les résultats présentés ne font état que des valeurs d'impédances d'entrées et des coefficients de réflexion et de transmission, la solution obtenue par la méthode des lignes permet d'obtenir tous les autres paramètres et distributions d'intérêt en électromagnétisme. Ainsi, on peut facilement afficher les distributions de champs et de courants en tous points dans l'espace, calculer le diagramme de rayonnement pour un réseau fini (en utilisant l'approximation du réseau périodique) ou calculer le ratio de puissance avant/arrière d'un réseau d'antenne, par exemple.

Le développement d'un programme d'analyse d'une ligne microruban en deux dimensions fait aussi partie des réalisations du projet, bien qu'il ne constitue pas une contribution originale. L'auteur n'a pas trouvé de logiciels équivalents permettant de fournir la distribution de champ magnétique dans le plan de masse et s'intégrant facilement à un autre programme.

### **Travaux ultérieurs**

Le présent travail laisse place à de nombreux développements supplémentaires. En voici une liste non exhaustive :

1. Lors d'un balayage en fréquence ou d'un balayage de l'angle d'incidence, le processus itératif de résolution du système d'équations utilise la solution cor-

respondant à la fréquence ou à l'angle de balayage simulé précédemment comme estimé initial de la solution. Cette technique réduit un peu le temps de calcul, mais pas de façon importante. Il serait intéressant de tenter de construire l'estimé de la solution à partir d'une interpolation (polynômiale ou rationnelle) basée sur les solutions obtenues pour plusieurs autres points de calcul.

2. Dans la même veine, on pourrait tenter de récupérer la solution obtenue pour un niveau de discrétisation donné et effectuer une interpolation qui servirait comme estimé initial lors de la recherche de solution pour un niveau supérieur de raffinement de la discrétisation.
3. Il serait très facile d'inclure les pertes diélectriques dans le modèle. Il suffirait pour ce faire d'utiliser une valeur complexe pour la permittivité des couches diélectriques.
4. Les pertes ohmiques pourraient être prises en compte en utilisant l'équation  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  dans le système d'équations non réduit (comportant les valeurs de courants et de champs). Ceci aurait pour conséquence qu'il ne serait plus possible de réduire la matrice, cependant.
5. Dans le présent travail, seuls des motifs métalliques de forme rectangulaire (plaque et fente) ont été représentés. Il faudrait déterminer comment les paramètres de bord peuvent être employés à la discrétisation de motifs arbitraires, ou utiliser les techniques existantes s'il y a lieu.
6. D'autres modèles de sources correspondant à différents problèmes périodiques pourraient être formulés en utilisant le modèle de base développé au chapitre 2 pour résoudre des problèmes intermédiaires comportant des sources d'excitation idéales. Par exemple, le modèle de source d'un cornet pourrait être développé afin de permettre la conception d'antennes à réflecteurs ou à lentilles.

En conclusion, nous avons développé un outil de calcul numérique basé sur la méthode des lignes et permettant de résoudre des problèmes périodiques multicouches



à forte discrétisation. Par rapport à la méthode des moments, l'approche de discrétisation des équations différentielles permet une plus grande généralisation quand aux structures analysables, puisqu'elle ne requiert pas la connaissance préalable de modes particuliers pour les courants sur les plaques et les champs dans les fentes. Elle souffre par contre de problèmes liés aux erreurs de discrétisation dans le cas des structures périodiques. Bien que ces derniers ne soient pas de nature à empêcher l'usage de la méthode comme outil de conception , une étude des paramètres de bord optimaux pourrait permettre de les atténuer.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BALANIS, C. A. (1989). *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley & Sons.
- [2] BHATTACHARYYA, A. K. (1996 Octobre). A Numerical Model for Multilayered Microstrip Phased-Array Antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-44, 1386–1393.
- [3] BHATTACHARYYA, A. K., ANTAR, Y. M. M., et ITTIPIBOON, A. (1992 Juin). Full wave analysis for the equivalent circuit of an inclined slot on a microstrip ground plane. *IEE Proceedings - part H*, 139, 245–250.
- [4] BLAIS-MORIN, L.-A. Les surfaces à sélection de fréquence. Travail de recherche bibliographique effectué dans le cadre du cours ELE6506 - Antennes et Propagation, École Polytechnique, (1998 mai).
- [5] CÁTEDRA, M. F., TORRES, R. P., BASTERRECHEA, J., et GAGO, E. (1995). *The CG-FFT Method - Application of Signal Processing Techniques to Electromagnetics*. Artech House.
- [6] CHOINIÈRE, E., et LAURIN, J.-J. (1998 Novembre). Modélisation de réseaux d'antennes microruban par la méthode des lignes. Dans *10<sup>e</sup> Journées Internationales de Nice sur les Antennes - Conférences*, 350–353.
- [7] COLLIN, R., et ZUCKER, F. J. *Antenna Theory, Part I*. McGraw-Hill, (1969), ch. 14, 602–619.
- [8] GONZALEZ, G. *Microwave Transistor Amplifiers*, 2<sup>nd</sup> ed. Prentice Hall, (1997), ch. 1, 45–60. Section 1.7 : *Power waves and generalized scattering parameters*.
- [9] ITOH, T., et MENZEL, W. (1963 Janvier). A Full-Wave Analysis Method for Open Microstrip Structures. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-29, 63–68.

- [10] JIN, J.-M., et VOLAKIS, J. L. (1990 Avril). Electromagnetic Scattering by a Perfectly Conducting Patch Array on a Dielectric Slab. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-38, 556–563.
- [11] JOUBERT, W. D., CAREY, G. F., BERNER, N. A., KALHAN, A., KOHLI, H., LORBER, A., MCLAY, R. T., et SHEN, Y. *PCG Reference Manual - A Package for the Iterative Solution of Large Sparse Linear Systems on Parallel Computers*, 1.0 ed. Los Alamos National Laboratory, The University of Texas at Austin and University of Tennessee, wdj@lanl.gov, carey@cfdlab.ae.utexas.edu, (1995 Septembre).
- [12] OPPENHEIM, A. V., WILLSKY, A. S., et YOUNG, I. T. (1983). *Signals and Systems*. Prentice-Hall.
- [13] PELLERIN, T., SÉGUIN, G., et BRASSARD, G. (1998 Août). Active Dual Band Dual Polarized Microstrip Array Panel. Dans *Proceedings of the 1998 Symposium on Antenna Technology and Applied Electromagnetics*, 625–629.
- [14] POZAR, D. M. (1982 Novembre). Input Impedance and Mutual Coupling of Rectangular Microstrip Antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-30, 1191–1196.
- [15] POZAR, D. M. (1986 Décembre). A Reciprocity Method of Analysis for Printed Slot and Slot-Coupled Microstrip Antennas. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-34, 1439–1446.
- [16] POZAR, D. M. (1989 Avril). Analysis of an Infinite Phased Array of Aperture Coupled Microstrip Patches. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-37, 418–425.
- [17] POZAR, D. M., et SCHAUBERT, D. H. (1984 Octobre). Analysis of an Infinite Array of Rectangular Microstrip Patches with Idealized Probe Feeds. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-32, 1101–1107.

- [18] POZAR, D. M., et SCHaubERT, D. H. (1984 Juin). Scan Blindness in Infinite Phased Arrays of Printed Dipoles. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-32, 602–610.
- [19] PREGLA, R., et PASCHER, W. *Numerical techniques for microwave and millimeter-wave passive structures*. John Wiley-Interscience publication, (1989), ch. 6 - The Method of Lines, 381–446.
- [20] PRESS, W. H., FLANNERY, B. P., TEUKOLSKY, S. A., et VETTERLING, W. T. (1989). *Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing (Fortran Version)*. Cambridge University Press.
- [21] SHEWCHUK, J. R. An Introduction to the Conjugate Gradient Method Witout the Agonizing Pain. Tech. rep., Carnegie Mellon University - School of Computer Science, [http ://www.cs.cmu.edu/~jrs/jrspapers.html#cg](http://www.cs.cmu.edu/~jrs/jrspapers.html#cg), (1994 Août).
- [22] STUTZMAN, W. L., et THIELE, G. A. (1981). *Antennna Theory and Design*. John Wiley & Sons.
- [23] SULLIVAN, P. L., et SCHaubERT, D. H. (1986 Août). Analysis of an Aperture Coupled Microstrip Antenna. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-14, 977–984.
- [24] VOLAKIS, J. L., LIN, Y. C., et ANASTASSIU, H. (1994 Février). TE Characterization of Resistive Strip Gratings on a Dielectric Slab Using a Single Edge-Mode Expansion. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-42, 205–212.
- [25] WHEELER, H. A. (1966 Novembre). The Grating-Lobe Series for the Impedance Variation in a Planar Phased-Array Antenna. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, AP-14, 707–714.

## Annexe I

### Diagonalisation de l'opérateur normalisé $D_n$ de différences finies centrées

Soit la matrice suivante de taille  $N \times N$  à diagonaliser :

$$D_n = \begin{bmatrix} -s & s^* & & & \\ & -s & s^* & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & s^* \\ s^* & & & & -s \end{bmatrix} \text{ avec } s = e^{jk_0\Delta/2} \quad (\text{I.1})$$

On cherche les valeurs propres  $v_{nk}$  et les vecteurs propres  $\mathbf{t}^{(k)}$  tels que :

$$(D_n - v_{nk}I) \mathbf{t}^{(k)} = 0 \quad (\text{I.2})$$

Les lignes 1 à  $N - 1$  de l'équation (I.2) peuvent s'écrire :

$$-(s + v_{nk}) t_i^{(k)} + s^* t_{i+1}^{(k)} = 0 \quad (\text{I.3})$$

Si on pose une solution de la forme

$$t_i^{(k)} = A_k e^{j(i-1)\varphi_k} \quad (\text{I.4})$$

alors on obtient :

$$\begin{aligned} v_{nk} &= s^* e^{j\varphi_k} - s = e^{-jk_0\Delta/2} e^{j\varphi_k} - e^{jk_0\Delta/2} \\ &= 2je^{j\varphi_k/2} \sin\left(\frac{\varphi_k - k_0\Delta}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

La  $N^e$  ligne de (I.2) nous donne :

$$s^* t_1^{(k)} - (s + v_{nk}) t_N^{(k)} = 0 \quad (\text{I.6})$$

Ce dernier résultat nous permet de déduire :

$$\frac{t_N^{(k)}}{t_1^{(k)}} = \frac{e^{-jk_0\Delta/2}}{e^{jk_0\Delta/2} + e^{-jk_0\Delta/2} e^{j\varphi_k} - e^{jk_0\Delta/2}} = e^{-j\varphi_k} \quad (\text{I.7})$$

En couplant les équations (I.4) et (I.7), on détermine  $\varphi_k$  :

$$\begin{aligned} \frac{t_N^{(k)}}{t_1^{(k)}} &= e^{j(N-1)\varphi_k} = e^{-j\varphi_k} \\ &\Downarrow \\ \varphi_k &= \frac{2\pi(k-1)}{N} \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

Le choix de  $k-1$  dans l'expression de  $\varphi_k$  est arbitraire. Il permet de simplifier l'emploi de la transformée de Fourier discrète comme substitut de l'opérateur  $T_e$  (voir section 2.11). Les vecteurs propres définis par (I.4) sont donc :

$$t_i^{(k)} = \frac{e^{j2\pi(i-1)(k-1)/N}}{\sqrt{N}} \quad (\text{I.9})$$

où on a choisi  $A_k = \frac{1}{\sqrt{N}}$  de sorte à obtenir une matrice de diagonalisation orthonormale :

$$T_e^{ik} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j2\pi(i-1)(k-1)/N} \quad (\text{I.10})$$

Puisque le facteur  $(i-1)$  à l'intérieur de l'exponentielle à l'équation (I.4) est arbitraire, nous pouvons définir une autre matrice de diagonalisation :

$$T_h^{ik} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j2\pi(i-\frac{1}{2})(k-1)/N} \quad (\text{I.11})$$

La combinaison des matrices  $\mathbf{T}_e$  et  $\mathbf{T}_h$  permet d'obtenir une expression simplifiée pour l'expression de  $\delta_{x,z}$  à l'équation (2.47), puisque la phase présente à l'équation (I.5) est alors éliminée.

## Annexe II

### Identités utiles

Dans cette annexe, nous développons les diverses identités utilisées tout au long du texte.

#### II.1 Inversion de $\bar{\mathbf{Z}}_m$

Nous cherchons ici l'inverse  $\bar{\mathbf{R}}_m = \bar{\mathbf{Z}}_m^{-1}$  de la matrice  $\bar{\mathbf{Z}}_m$  telle que définie par (2.84) à la section 2.5 :

$$\bar{\mathbf{Z}}_m = \frac{k_0}{\epsilon_{rm}} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ym}^{-1} \sinh(\mathbf{k}_{ym} d_m) \left( \hat{\lambda}_x^2 - \epsilon_{rm} \hat{\mathbf{I}} \right) & -\tilde{\delta} \mathbf{k}_{ym}^{-1} \sinh(\mathbf{k}_{ym} d_m) \\ -\tilde{\delta}^* \mathbf{k}_{ym}^{-1} \sinh(\mathbf{k}_{ym} d_m) & \mathbf{k}_{ym}^{-1} \sinh(\mathbf{k}_{ym} d_m) \left( \hat{\lambda}_z^2 - \epsilon_{rm} \hat{\mathbf{I}} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

Puisque cette matrice est composée de quatre blocs diagonaux, on peut utiliser la méthode de Cramer en effectuant les opérations sur les blocs diagonaux comme s'il s'agissait de scalaires. Rappelons d'abord la méthode de Cramer :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \{ \text{Cofacteurs}(A) \}^t \quad (\text{II.2})$$

Calculons le déterminant de (II.1) :

$$\begin{aligned} |\bar{\mathbf{Z}}_m| &= \frac{k_0^2}{\epsilon_{rm}^2} \mathbf{k}_{ym}^{-2} (\sinh(\mathbf{k}_{ym} d_m))^2 \left( \left( \hat{\lambda}_x^2 - \epsilon_{rm} \hat{\mathbf{I}} \right) \left( \hat{\lambda}_z^2 - \epsilon_{rm} \hat{\mathbf{I}} \right) - \tilde{\delta} \tilde{\delta}^* \right) \\ &= -\frac{1}{\epsilon_{rm}} \mathbf{k}_{ym}^{-2} (\sinh(\mathbf{k}_{ym} d_m))^2 \underbrace{k_0^2 \left( \hat{\lambda}_x^2 + \hat{\lambda}_z^2 - \epsilon_{rm} \hat{\mathbf{I}} \right)}_{\mathbf{k}_{ym}^2} \\ &= -\frac{(\sinh(\mathbf{k}_{ym} d_m))^2}{\epsilon_{rm}} \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$



où l'on a utilisé  $\bar{\delta}\bar{\delta}^* = \hat{\lambda}_x^2 \hat{\lambda}_z^2$ . Puis employons la méthode de Cramer pour calculer l'inverse de  $\bar{\mathbf{Z}}_m$  :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}_m &= \bar{\mathbf{Z}}_m^{-1} \\ &= -k_0 \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{y_m}^{-1} \operatorname{csch}(\mathbf{k}_{y_m} d_m) \left( \hat{\lambda}_z^2 - \epsilon_{rm} \hat{\mathbf{I}} \right) & \bar{\delta} \mathbf{k}_{y_m}^{-1} \operatorname{csch}(\mathbf{k}_{y_m} d_m) \\ \bar{\delta}^* \mathbf{k}_{y_m}^{-1} \operatorname{csch}(\mathbf{k}_{y_m} d_m) & \mathbf{k}_{y_m}^{-1} \operatorname{csch}(\mathbf{k}_{y_m} d_m) \left( \hat{\lambda}_x^2 - \epsilon_{rm} \hat{\mathbf{I}} \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

## II.2 Identité 1

Dans cette section, nous démontrerons l'identité suivante :

$$\bar{\mathbf{V}}_m \bar{\mathbf{Z}}_m^{-1} \bar{\mathbf{V}}_m - \bar{\mathbf{Y}}_m = \bar{\mathbf{Z}}_m^{-1} \quad (\text{II.5})$$

utilisée à l'équation (2.102). Rappelons l'expression pour  $\bar{\mathbf{V}}_m$  :

$$\bar{\mathbf{V}}_m = \begin{bmatrix} \cosh(\mathbf{k}_{y_m} d_m) & 0 \\ 0 & \cosh(\mathbf{k}_{y_m} d_m) \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

En utilisant (II.4), on peut exprimer le premier terme de (II.5) comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{V}}_m \bar{\mathbf{Z}}_m^{-1} \bar{\mathbf{V}}_m &= -k_0 \begin{bmatrix} \left( \hat{\lambda}_z^2 - \epsilon_{rm} \hat{\mathbf{I}} \right) & \bar{\delta} \\ \bar{\delta}^* & \left( \hat{\lambda}_x^2 - \epsilon_{rm} \hat{\mathbf{I}} \right) \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{y_m}^{-1} \coth(\mathbf{k}_{y_m} d_m) \cosh(\mathbf{k}_{y_m} d_m) & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_{y_m}^{-1} \coth(\mathbf{k}_{y_m} d_m) \cosh(\mathbf{k}_{y_m} d_m) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Sachant que  $\bar{\mathbf{Y}}_m$  peut s'écrire :

$$\bar{\mathbf{Y}}_m = -k_0 \begin{bmatrix} \left( \hat{\bar{\lambda}}_z^2 - \epsilon_{rm} \hat{\mathbf{I}} \right) & \bar{\delta} \\ \bar{\delta}^* & \left( \hat{\bar{\lambda}}_x^2 - \epsilon_{rm} \hat{\mathbf{I}} \right) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ym}^{-1} \sinh(\mathbf{k}_{ym} d_m) & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_{ym}^{-1} \sinh(\mathbf{k}_{ym} d_m) \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

et sachant que  $\coth(x) \cosh(x) - \sinh(x) = \text{csch}(x)$ , on obtient pour le membre gauche de (II.5) :

$$\bar{\mathbf{V}}_m \bar{\mathbf{Z}}_m^{-1} \bar{\mathbf{V}}_m - \bar{\mathbf{Y}}_m = -k_0 \begin{bmatrix} \left( \hat{\bar{\lambda}}_z^2 - \epsilon_{rm} \hat{\mathbf{I}} \right) & \bar{\delta} \\ \bar{\delta}^* & \left( \hat{\bar{\lambda}}_x^2 - \epsilon_{rm} \hat{\mathbf{I}} \right) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ym}^{-1} \text{csch}(\mathbf{k}_{ym} d_m) & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_{ym}^{-1} \text{csch}(\mathbf{k}_{ym} d_m) \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

Or cette expression est compatible avec (2.103), ce qui prouve la validité de l'identité (II.5).